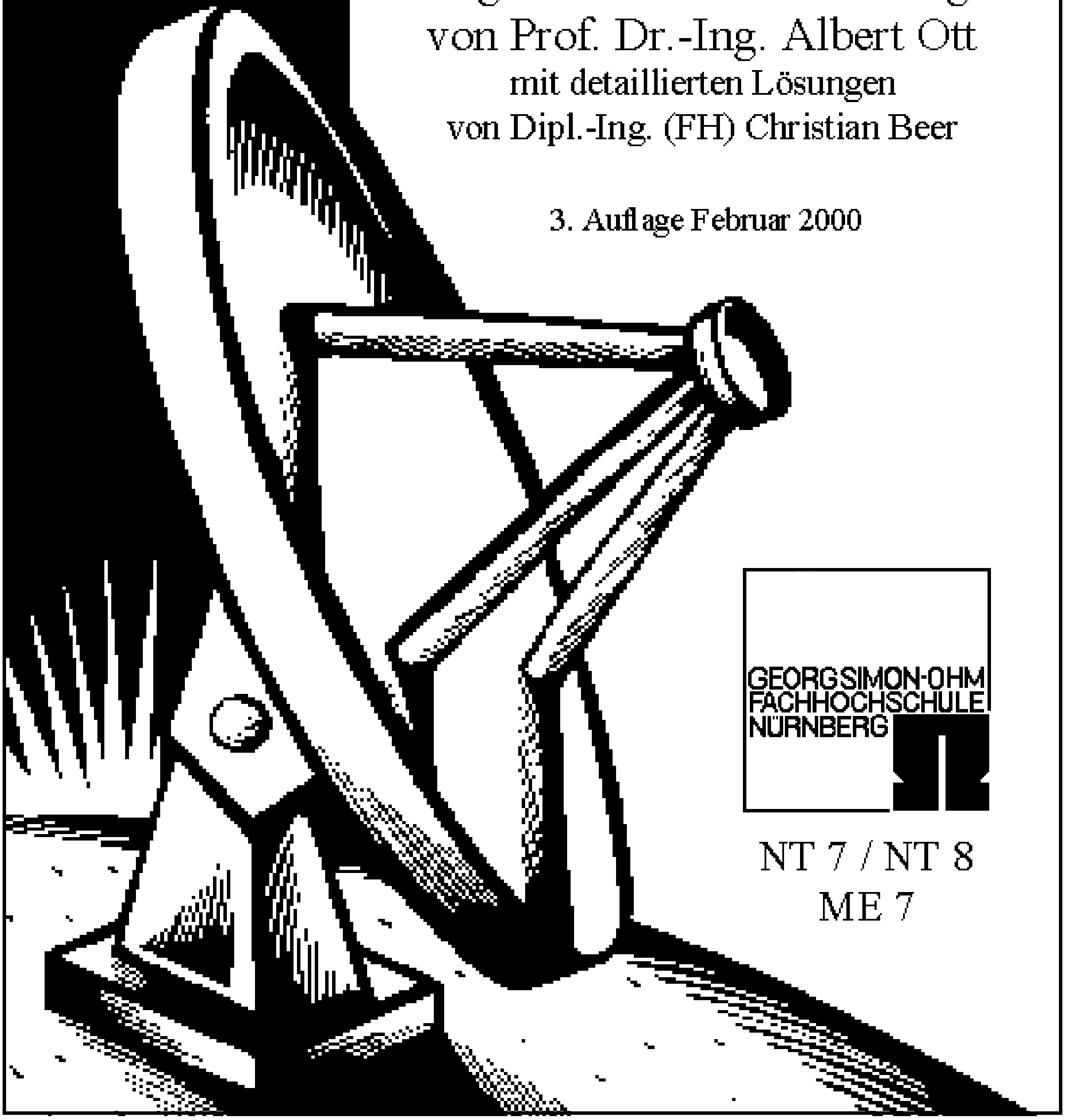
GEORG-SIMON-OHM-FACHHOCHSCHULE NÜRNBERG
Fachbereich
Nachrichten- und
Feinwerktechnik

Hochfrequenztechnik
Aufgabensammlung

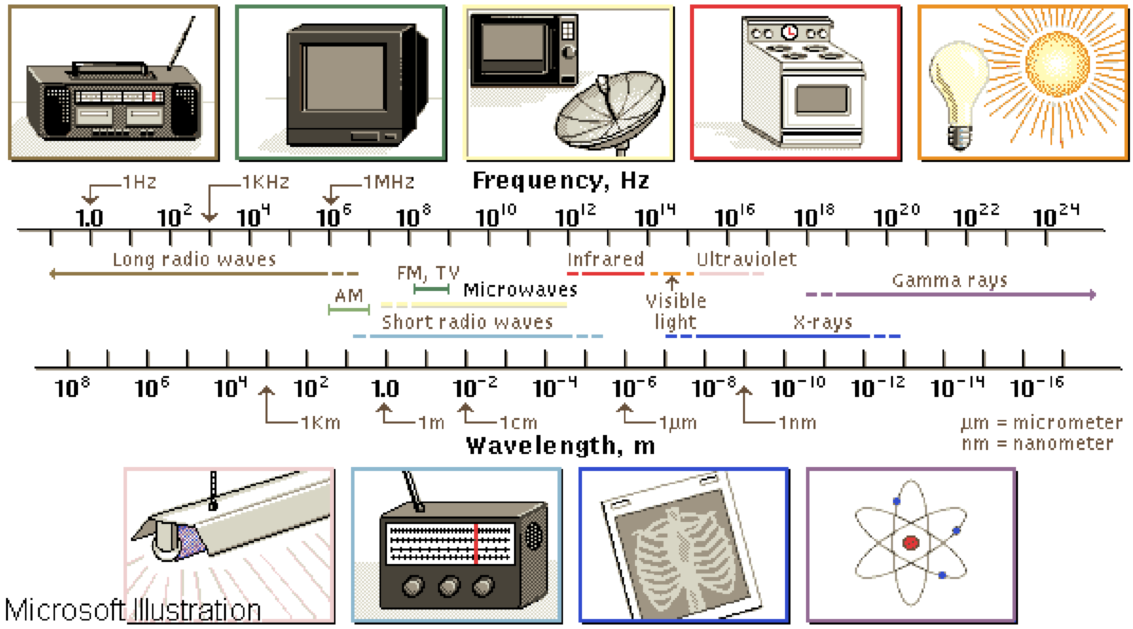
begleitend zu der Vorlesung
von Prof. Dr.-Ing. Albert Ott
mit detaillierten Lösungen
von Dipl.-Ing. (FH) Christian Beer

3. Auflage Februar 2000



GEORG SIMON-OHM
FACHHOCHSCHULE
NÜRNBERG

NT 7 / NT 8
ME 7



1. Auflage Oktober 1996 (100 Stück gebundene Ausgaben + Download Word-Datei)

2. Auflage Oktober 1997 (100 Stück gebundene Ausgaben + Download Word-Datei)

3. Auflage Februar 2000 (nur Download als PDF-Datei)

Herausgeber: Dipl.-Ing. (FH) Christian Beer

eMail: Christian@Beer-Net.de
Internet: http://www.Beer-Net.de

Aufgabensammlung zur Hochfrequenztechnik

1. Vorwort

Diese Aufgabensammlung dient der Vorbereitung auf die Prüfung im Fach Hochfrequenztechnik bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Albert Ott, Dozent für Theoretische Elektrotechnik, Hochfrequenztechnik und Hochfrequenzsysteme an der Fachhochschule Nürnberg.

Wegen des positiven Feedbacks auf die Aufgabensammlung und des Ausverkaufs der zweiten Auflage (ebenfalls in gebundener Form), habe ich mich entschlossen das Skript auch für zukünfitige Studentengenerationen in einer dritten Auflage fortzusetzen.
Da ich jedoch zunehmend berufsbedingt nicht mehr über die Zeitresourcen verfüge eine neue Druckauflage umzusetzen und die Verteilung an der Fachhochschule Nürnberg zu koordinieren, wird die dritte Auflage nur noch im Internet per Download als PDF-Datei angeboten. Das spart den Studenten das Kleingeld und mir die Anwesenheit bzw. den Erfüllungsgehilfen.

Beim Rechnen der Aufgaben kann es zu geringfügigen Unterschieden im Ergebnis im Vergleich zur Musterlösung kommen, da entweder mit exakten oder gerundeten Zwischenergebnissen weitergerechnet wird oder, weil die Naturkonstanten in genauerer Form des Taschenrechners oder als Näherung verwendet werden. Der angegebene Lösungsweg sollte aber immer für Klarheit sorgen. Auch führen bei manchen Aufgaben verschiedene Ansätze zum gleichen Ergebnis.

Zum Schluß möchte ich mich noch mit einer Bitte in eigener Sache an die Studenten wenden. Sollten inhaltliche Fehler entdeckt werden, so wäre ich über eine kurze Mitteilung per eMail (siehe Impressum) sehr dankbar. Desweiteren ist mir ein Feedback generell sehr willkommen.

Christian Beer

2. Lehrinhalte der Vorlesung Hochfrequenztechnik von Prof. Ott

1 Die ebene elektromagnetische Welle im freien Raum und in isotropen Werkstoffen

Lösungen der Maxwell-Feldgleichungen; Phasengeschwindigkeit; Feldwellenwiderstand; Poynting-Vektor; Polarisationsformen; Berücksichtigung kleiner Verluste im Werkstoff; Wellenmoden; TEM-, TE-, TM-Wellen

2 Die verlustfreie Hochfrequenzleitung

2.1 Theoretische Grundlagen

Lösung der Leitungsgleichungen; Phasengeschwindigkeit; Wellenwiderstand; Poynting-Vektor; Reflexionsfaktor; Smith-Diagramm; Impedanztransformation; Feldverlauf in der Querschnittsebene; Gleichtakt- und Gegentaktwellen bei gekoppelten Leitungen

2.2 Anwendung der theoretischen Grundlagen in Streifenleitungen; Bauformen von Streifenleitungen; Berechnung und Realisierung von Baugruppen der Mikrowellentechnik mit Streifenleitungen; technologische Gesichtspunkte der Streifenleitungstechnik

3 Verfahren der HF-Signalverarbeitung und HF-Meßtechnik

Netzwerkanalyse; Messung von S-Parametern; Reflexionsfaktoren; Impedanzen; Spektrumanalyse; FFT; Messung im Zeitbereich; Abtastverfahren; Frequenzumsetzung und Mischung; Phasen- und Gruppenlaufzeit; Rauschverhalten von Mikrowellenschaltungen

4 Baugruppen der Hochfrequenztechnik mit passiven und aktiven Komponenten

Rauscharme Verstärker; Mischer

5 Das besondere Verhalten von Werkstoffen bei Mikrowellen

Skineffekt bei metallischen Werkstoffen; Dielektrische Werkstoffe als Substrate von Wellenleitern und Mikrowellenschaltungen; Nichtreziproke Ferrite in der Mikrowellen-technik

6 Ausbreitung geführter elektromagnetischer Wellen in Hohlleitern

Lösung der Feldgleichungen; Eigenfunktionen und Eigenwerte; Wellenmoden; Kenngrößen der Wellenausbreitung; Mikrowellen-Baugruppen in Hohlleitertechnik; Hohlraum-Resonatoren

7 Ausbreitung geführter elektromagnetischer Wellen auf dielektrischen Wellenleitern

Lösung der Feldgleichungen; Wellenmoden; Ausblick zur Wellenausbreitung auf Lichtwellenleitern; Führung elektromagnetischer Wellen an Grenzflächen unterschiedlicher Werkstoffe; Wirkung kleiner Verluste

8 Das Erzeugen hochfrequenter Schwingungen

Beispielhafte Darstellung technisch wichtiger Mikrowellen-Generatoren für kleine, mittlere und große Leistung

9 Anregung elektromagnetischer Wellen

Grundzüge der Antennentechnik, Kenngrößen und deren Berechnung

Studienschwerpunkte Mikroelektronik und Nachrichtentechnik: Kapitel 1 bis 5 im 7. Semester
Studienschwerpunkt Nachrichtentechnik: Kapitel 6 bis 9 im 8.Semester
gültig ab Sommersemester 1994

3. Studienbegleitende Literatur zur Vorlesung HF-Technik

- Bachmann, W. Signalanalyse
- Herter / Rupp Nachrichtenübertragung über Satelliten
- Hock / Pauli Antennentechnik
- Käs, G. Radartechnik
- Meinke / Gundlach Taschenbuch der Hochfrequenztechnik
- Nimtz, G. Mikrowellen
- Pehl, E. Mikrowellentechnik Band 1 und 2
- Pöschl, K. Mathematische Methoden in der Hochfrequenztechnik
- Unger, H.-G. Elektromagnetische Theorie für die Hochfrequenztechnik Teil I und II
- Zinke / Brunswig Lehrbuch der Hochfrequenztechnik Band 1 und 2

ergänzende Literatur

- Born, M. Optik

4. Ein Wort zur Prüfung

Die Prüfung dauert für Mikroelektroniker 60 Minuten, für Nachrichtentechniker 90 Minuten. Oftmals ist der erste Teil der Aufgaben für beide Studienschwerpunkte gleich; dies ist jedoch nicht zwingend so.
Im SS 1996 bestand die Prüfung aus drei Aufgaben für ME und fünf Aufgaben für NT; wobei die Aufgaben von ME auch für NT galten. Sie unterteilten sich jeweils in zahlreiche Unterpunkte für deren Beantwortung direkt anschließend Platz gehalten wurde, so daß der Umfang größer erscheint als Fragen vorhanden sind!
Die Hilfsmittel sind unbeschränkt (abgesehen vom Nachbarn !!!). Es empfiehlt sich daher neben dem üblichen Schreibmaterial (keinen Rotstift verwenden !) samt Geodreieck und Zirkel das Vorlesungsskriptum, eine Formelsammlung, einen Taschenrechner und nicht zuletzt diese Aufgabensammlung mitzunehmen.

Christian Beer

5. Anmerkungen zu den Aufgaben in bezug zu den Prüfungen

a) Die Übungen sollen zu einer vertieften Beschäftigung mit dem Vorlesungsstoff anregen.
Die Prüfungem entsprechen im Stil den Übungen, was jedoch keine Aussage über den Schwierigkeitsgrad der Prüfungen enthält. In der Regel sind Prüfungsaufgaben etwas schwieriger als die Übungsaufgaben.

b) Unter die Übungen sind einige ältere Prüfungsaufgaben gemischt, die Prüfungen sind aber keine Auswahl aus den Übungen sondern werden von Semester zu Semester neu gestellt.

c) In den Prüfungen werden oft auch Verständnisfragen zum Lehrstoff gestellt, die dann meist ohne Rechnung zu beantworten sind; Übungen dieser Art sind nicht vorhanden.

d) In den Prüfungen können Aufgaben vorkommen, welche die Anwendung des Lehrstoffes in anderen Bereichen der Technik betreffen, so wie es der ingenieurmäßigen Praxis entspricht. Eine Prüfung aus einem anderen Fachgebiet wird jedoch daraus nicht.

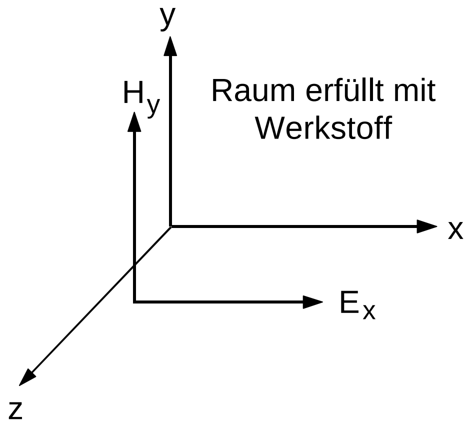
e) Eine erfolgreiche Bearbeitung der Prüfungsaufgaben setzt die Beschäftigung mit dem Lehrstoff und mit den Übungen voraus.

Prof. Dr.-Ing. Ott

6. Aufgaben zur Hochfrequenztechnik

Übung 1:

6.1. Ebene elektromagnetische Welle in einem verlustbehaftetem Dielektrikum



Daten:

$\mu_0 = 1.256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$

$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

$\varepsilon_r = 2.4$

$\delta = 10^{-3}$

Eine ebene elektromagnetische Welle läuft in dem gegebenen Dielektrikum in positiver z-Richtung. Die Dielektrizitätskonstante des Werkstoffes ist gegeben mit

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot (1 - j\delta)$$

a) Verwenden Sie die Gleichung für die Fortpflanzugsgerade γ des verlustfreien Dielektrikums, setzen Sie das angegebene ε ein und berechnen Sie das hier gültige γ allgemein in der Form

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

Anmerkung: Verwenden Sie die Näherung $\sqrt{1 \pm j\delta} \approx 1 \pm j \cdot \frac{\delta}{2}$

b) Verwenden Sie die Gleichung für den Feldwellenwiderstand des verlustfreien Dielektrikums, setzen Sie das angegebene ε ein und berechnen Sie den hier gültigen Z_F allgemein in der Form

$$Z_F = Z_{FR} + j \cdot Z_{FI}$$

Anmerkung: Verwenden Sie die Näherung aus a) sowie die weitere Näherung

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm j \cdot \delta}} \approx 1 \mp j \cdot \frac{\delta}{2}$$

c) Berechnen Sie allgemein den komplexen Refelxionsfaktor r als Funktion von Z_{F0} , Z_{FR} und Z_{FI} der entsteht, wenn die elektromagnetische Welle aus dem freien Raum kommend auf eine Grenzfläche aus dem gegebenen Dielektrikum trifft.

d) Die Frequenz f der Welle beträgt

$$f = 2\,\mathrm{GHz} = 2 \cdot 10^{9}\ \mathrm{Hz}$$

Berechnen Sie die Wellenlänge im Werkstoff (Verluste sind dabei ohne Bedeutung) zahlenmäßig.

e) Berechnen Sie zahlenmäßig die Strecke x_0 , welche die Welle im Werkstoff durchlaufen kann, bis die Amplitude auf 1/e des Anfangswertes abgefallen ist.

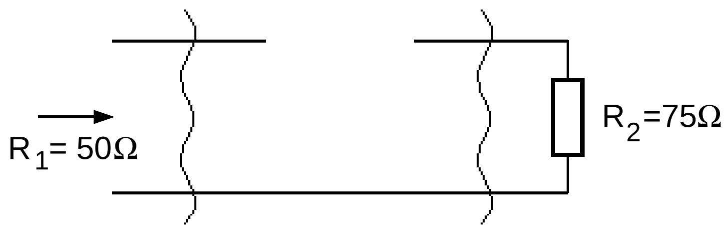
f) Wie viele Wellenlängen (im Dielektrikum) beträgt die Strecke x_0 nach e) ?

g) Wie groß ist der Zahlenwert des Imaginärteiles des Feldwellenwiderstandes bei der Frequenz nach d) ?

Übung 2:

6.2. Dimensionieren einer Transformationsschaltung

Hinweis: Diese Aufgabe ist nicht prüfungsrelevant, sondern dient vielmehr zur Vorbereitung auf das HF-Praktikum im 8. Semester.



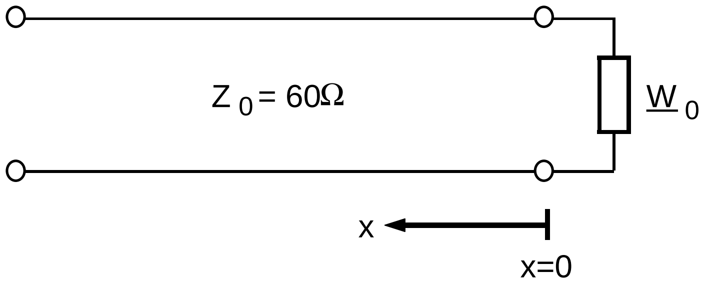
Transformations-Schaltung

Ein reeller Widerstand R_2 = 75 Ω soll mit einer geeigneten Transformationsschaltung in den reellen Widerstand R_1 = 50 Ω transformiert werden. Die Betriebsfrequenz ist f = 300 MHz.

a) Geben Sie alle grundsätzlich möglichen Transformationsschaltungen hierfür an (nur Transformationen mit zwei Blindelementen)

b) Wählen Sie eine Ihnen geeignet erscheinende Schaltung aus und ermitteln Sie die Werte der Blindelemente. (Kreisdiagramm verwenden)

Übung 3:
6.3. Übertragungsleitung



Eine verlustfreie Übertragungsleitung hat den reellen Wellenwiderstand Z_0 = 60 Ω.

a) Die Leitung ist bei x = 0 mit der komplexen Impedanz $\underline{W}_0$ =30 Ω + j24 Ω beschaltet. Berechnen Sie den komplexen Reflexionsfaktor $\underline{r}$!
(Geben Sie den Reflexionsfaktor in der Form Re($\underline{r}$) + jIm($\underline{r}$) *und* in der Form $r \cdot e^{j\varphi_r}$ an!)

b) Die komplexe Amplitude der hinlaufenden Spannungswelle bei x = 0 hat den Wert $\underline{U}_h(0) = 3\,\hat{V}$. Berechnen Sie die komplexe Amplitude der reflektierten Spannungswelle bei x = 0, also $\underline{U}_r(0)$!

c) Berechnen Sie die komplexe Amplitude der hinlaufenden Stromwelle bei x = 0, also $\underline{I}_h(0)$ und die komplexe Amplitude der reflektierten Stromwelle bei x = 0, also $\underline{I}_r(0)$!

d) Berechnen Sie die komplexe Amplitude der Gesamtspannung bei x = 0 !

e) Berechnen Sie die an die Last abgegebene Wirkleistung!

Übung 4:

6.4. Hochfrequenzleitung

Eine Hochfrequenzleitung hat folgende Daten:

Kapazitätsbelag	C^*	=	83 pF/m
Induktivitätsbelag	L^*	=	300 nH/m
Widerstandsbelag	R^*	=	1 Ω/m
Leitwertbelag	G^*	=	0

a) Berechnen Sie diejenige Frequenz, ab der diese Leitung als verlustfreie Hochfrequenzleitung betrachtet werden kann! Verwenden Sie als Kriterium hierfür: $R^* \leq 0.01 \cdot \omega_g \cdot L^*$.

Behandeln Sie für die nun folgenden Fragen die Leitung als verlustfrei!

b) Wie groß ist der Wellenwiderstand der Leitung bei der Frequenz f = 1 GHz ?

c) Wie groß ist die Phasengeschwindigkeit auf der Leitung?

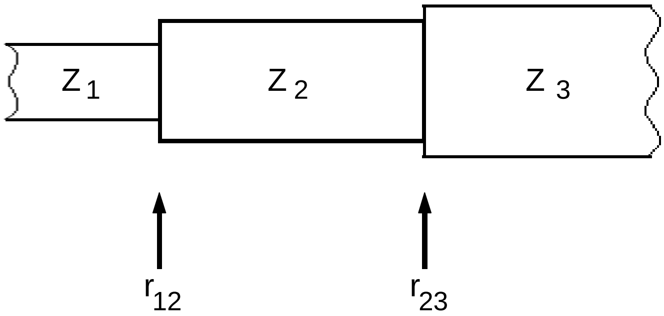
d) Die Leitung ist mit einem Werkstoff gefüllt, für den gilt μ_r =1. Wie groß ist mit dem Ergebnis nach c) die Elektrizitätszahl ε_r des Werkstoffes in der Leitung?

e) Mit einem Stück dieser Leitung, welches am Ende kurzgeschlossen wird, soll ein induktiver Blindwiderstand von

$$jX = j \cdot 100\Omega$$

bei der Frequenz f = 1 GHz realisiert werden. Wie lang muß das zu verwendende Leitungsstück sein?

Übung 5:
6.5. Impedanztransformation mit $\lambda/4$-Leitung



Eine Streifenleitung mit dem Wellenwiderstand

$$Z_3 = 60\ \Omega$$

soll mittels $\lambda/4$-Leitung an eine Streifenleitung mit dem Wellenwiderstand

$$Z_1 = 50\ \Omega$$

angepaßt werden.

a) Berechnen Sie den Wellenwiderstand Z_2 der $\lambda/4$-Transformationsleitung !

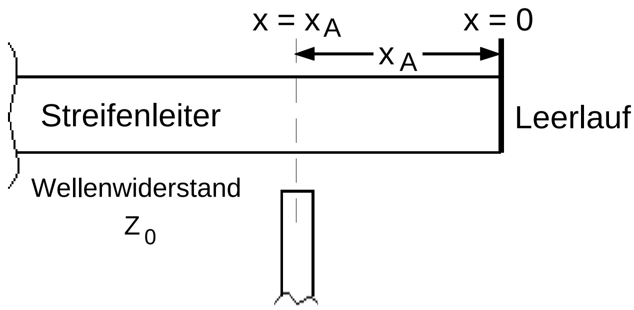
b) Berechnen Sie den Reflexionsfaktor r_{12} beim Wellenübergang von Z_1 nach Z_2 !

c) Berechnen Sie den Reflexionsfaktor r_{23} beim Wellenübergang von Z_2 nach Z_3 !

d) Ist diese Art der Transformation schmalbandig oder breitbandig? Geben Sie eine kurze Begründung an!

Übung 6:

6.6. Kapazitive Ankopplung an eine Hochfrequenz-Streifenleitung



Die Streifenleitung wird bei f = 3 GHz betrieben. Sie hat bei x = 0 einen Leerlauf (Abstrahlverluste im Leerlaufbetrieb werden hier nicht berücksichtigt).
Die Streifenleitung ist auf einem Dielektrikum mit $\varepsilon_r = 2$ aufgebaut.

An der Stelle $x = x_A$, deren Koordinate Sie berechnen sollen, wird eine kapazitive Ankopplung an eine Stichleitung benötigt.

a) Gehen Sie von den allgemeinen Leitungsgleichungen in der Form

$$U(x) = U(0) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) + j \cdot I(0) \cdot Z_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right)$$

$$I(x) = j \cdot \frac{U(0)}{Z_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) + I(0) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right)$$

aus und formulieren Sie diese für den hier geltenden Leerlaufbetrieb.

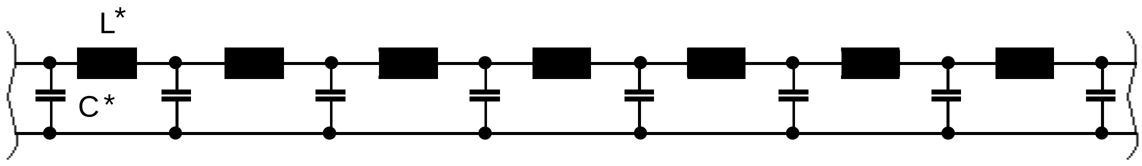
b) An der Auskoppelstelle $x = x_A$ soll die Spannungsamplitude

$$|U_A| = 0.8 \cdot |U_{max}|$$

haben, wobei $|U_{max}|$ die höchste auf der Leitung vorkommende Spannung ist. Die Auskopplung sei so lose, daß sie die Spannungsverteilung auf der Leitung nicht verändert.
Berechnen Sie die Koordinate x_A , an der die Auskopplung vorgenommen werden muß.

Übung 7:

6.7. Dimensionieren einer Verzögerungsleitung



Die Verzögerungsleitung für eine geführte elektromagnetische Welle soll aus konzentrierten Bauelementen (Induktivitäten im Längszweig, Kapazitäten im Querzweig) aufgebaut werden. Zur Berechnung wird mit dem Modell der Hochfrequenzleitung gerechnet.

Vorgegeben sind:

Phasengeschwindigkeit der Welle $v = 1.5 \cdot 10^9 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

Kapazitätsbelag $C^* = 2 \frac{\text{pF}}{\text{cm}}$

a) Berechnen Sie den erforderlichen Induktivitätsbelag L^*, damit auf der Verzögerungsleitung die vorgegebene Phasengeschwindigkeit entsteht.

b) Berechnen Sie den Wellenwiderstand, den die so dimensionierte Verzögerungsleitung hat.

c) Die Leitung wird praktisch so realisiert, daß alle 2 cm eine Kapazität C und eine Induktivität L zu einem Kettenleiter zusammengeschaltet wird. Berechnen Sie die einzubauenden Schaltelemente C und L.

d) Die Leitung wird bei der Frequenz f = 50 MHz betrieben. Welche Wellenlänge λ stellt sich dabei auf der Verzögerungsleitung ein?

e) Die eingebauten Induktivitäten haben einen Verlustfaktor bei 50 MHz

$$\tan(\delta_L) = \frac{R}{\omega L} = 10^{-2}$$

während die Kapazitäten verlustfrei sind. Berechnen Sie die Dämpfungskonstante α der Leitung allgemein und bei f = 50 MHz .

Übung 8:

6.8. Kompensation der Störreaktanz in einer Mikrowellenleitung

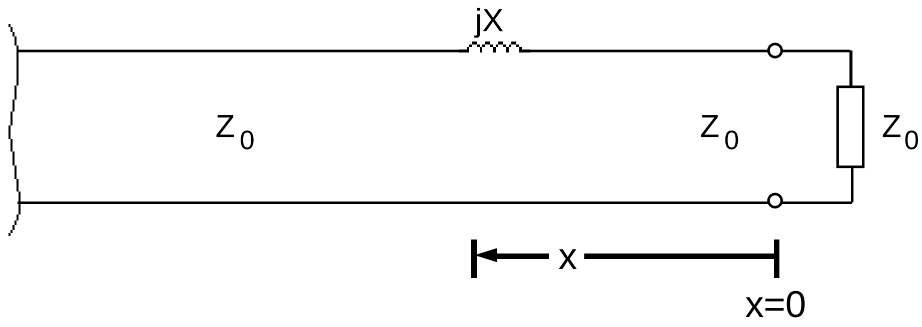


Bild A: Leitung mit Störung jX

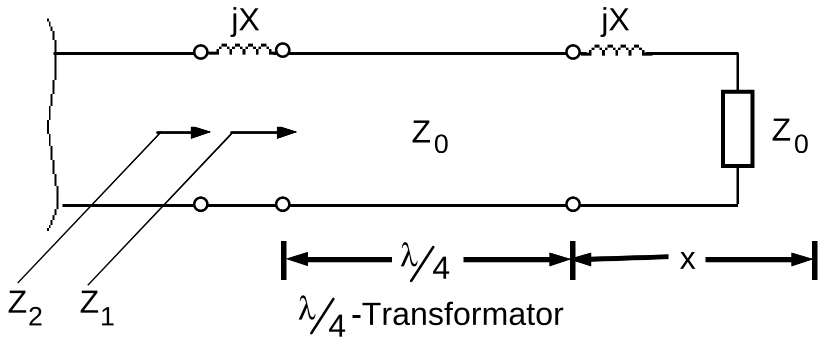


Bild B: Fehlermodell mit Kompensation durch jX

In einer Mikrowellenleitung des Wellenwiderstandes Z_0 tritt an der Stelle x eine Feldverformung auf, die sich als eine in Serie geschaltete Reaktanz jX darstellen läßt. In obiger Zeichnung stellt Bild A dies dar. Bild B ist das Fehlermodell mit dem Sie rechnen sollen.

a) Man denkt sich vor die Impedanz $Z_0 + jX$ eine $\lambda/4$-Leitung des Wellenwiderstandes Z_0 geschaltet. Berechnen Sie die Impedanz Z_1 nach dieser $\lambda/4$-Transformation.

b) In Reihe zu der in a) berechneten Impedanz Z_1 wird nun eine gleichgroße Reaktanz jX geschaltet wie die, welche den Fehler verursacht hat. Geben Sie die Impedanz Z_2 an.

c) Erweitern Sie Z_1 konjugiert komplex und bringen Sie damit Z_2 in die Form

$$Z_2 = Z_0 + jX_{Rest}$$

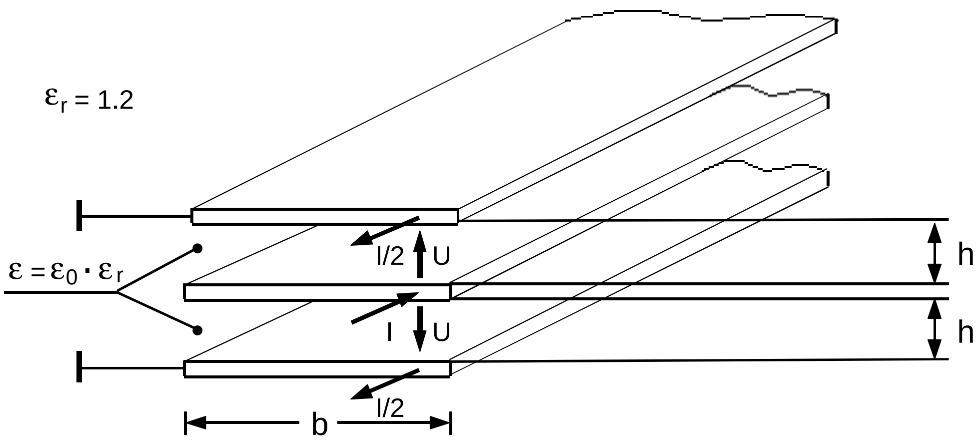
wobei Sie annehmen, daß die Störung klein ist, daß also gilt $x << Z_0$.

d) Berechnen Sie den Wert von X_{Rest} für

$$Z_0 = 50\ \Omega$$
$$X = 2\ \Omega$$

Übung 9:

6.9. Triplate-Leitung



Eine Triplate-Leitung für Mikrowellen besteht aus einer elektrisch leitenden Mittelebene und zwei parallelen Ebenen im Abstand von je h, welche auf gemeinsamem Massepotential liegen. Alle drei Ebenen haben die Breite b und es gilt:

$$h << b$$

Die beiden Zwischenräume zwischen den Ebenen sind mit Dielektrikum mit

$$\varepsilon_r = 1.2$$

gefüllt. Die Dicke der metallischen Ebenen selbst ist vernachlässigbar klein; Randfelder bleiben unberücksichtigt.

a) Wie groß ist die Phasengeschwindigkeit v_P auf der Leitung? (Allgemeine Gleichung und Zahlenwert)

b) Berechnen Sie allgemein die Gleichung für den Kapazitätsbelag C^* dieser Leitung.

c) Berechnen Sie allgemein die Gleichung für den Wellenwiderstand dieser Leitung.

d) Die Leitung soll einen Wellenwiderstand von Z = 20 Ω aufweisen. Wie groß ist die Breite b zu dimensionieren, wenn vorgegeben ist

$$h = 0.4\text{ mm} \quad ?$$

e) Die Triplate-Leitung wird an einen Mikrowellengenerator angelegt. (Beachten Sie die gegebenen Zählpfeile für U und I). Tragen Sie in untenstehende Skizze für beide Halbräume der Leitung ein

E-Vektor der elektrischen Feldstärke
H-Vektor der magnetischen Feldstärke
P^x Poyntingschen Vektor des Leistungsflusses

obere Ebene

Vektoren bitte kenn-zeichen

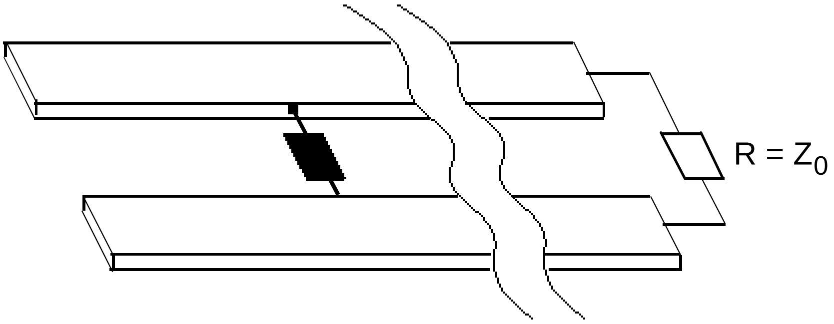
mittlere Ebene

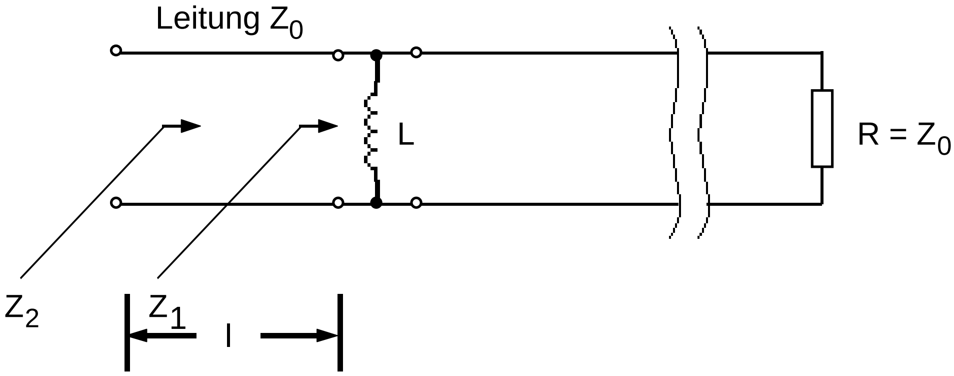
untere Ebene

f) Das Dielektrikum hat einen Verlustfaktor von $\tan(\delta_\varepsilon) = 10^{-3}$. Die ohmschen Widerstände aller Leiter bleiben außer Betracht. Wie groß ist die Blindkomponente des Wellenwiderstandes? (Angabe in Ohm)

Übung 10:

6.10. Einbau eines Bauelementes in eine Streifenleitung





$Z_0 = 200\ \Omega$; f = 1 GHz

Eine Streifenleitung (Schlitzleitung) ist mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen. An der gezeichneten Stelle ist eine Induktivität

$$L = 15.9 \text{ nH}$$

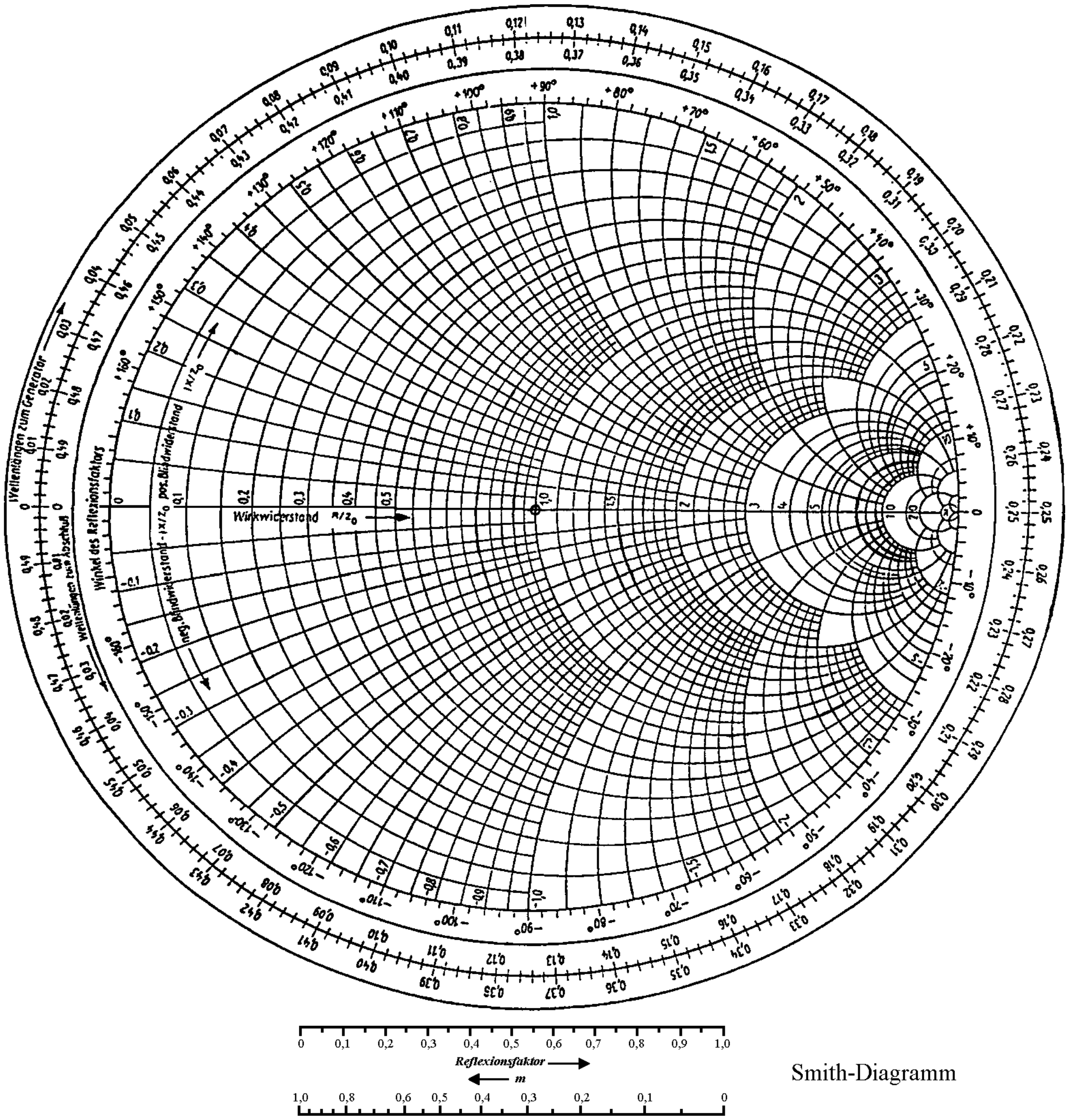
eingebaut.

a) Berechnen Sie die Impedanz $Z_1 = (R_1 + jX_1)$
(Die Induktivität und ihr Ersatzschaltbild hat eine sehr kleine Abmessung gegenüber der Wellenlänge)

b) Tragen Sie Z_1 in das Smith-Diagramm ein. Welcher Reflexionsfaktor r_1 ergibt sich damit an der Stelle von Z_1 ? (Angabe in Polarkoordinaten)

c) Vor die Induktivität wird nun ein weiteres Stück Leitung der Länge l = 8.0 cm geschaltet. Die Wellenlänge auf der Leitung beträgt $\lambda_l = 25$ cm.
Tragen Sie den Transformationsweg dieses Leitungsstückes in das Smith-Diagramm ein. Wie groß sind Reflexionsfaktor r_2 und Impedanz $Z_2 = (R_2 + jX_2)$?

Smith-Diagramm zu Übung 10:

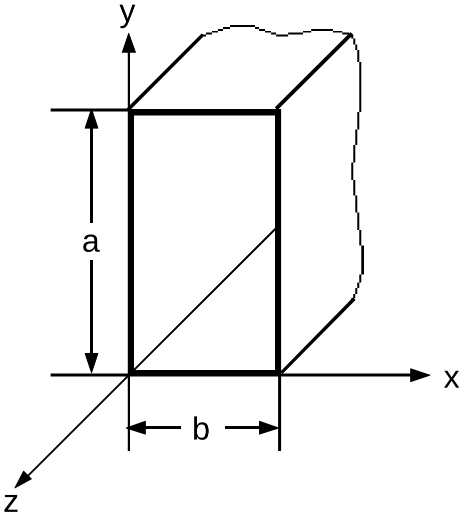


Smith-Diagramm

Übung 11:

6.11. Wellenausbreitung in rechteckförmigem Hohlleiter

Hinweis: Diese und die folgenden Aufgaben betreffen nur noch den Kurs NT 8 und sind für die Mikroelektroniker nicht mehr Gegenstand der Prüfung !!! (Ausnahme: evtl. Ü 16)



a = 10 cm ; b = 4 cm

a) Was ist das Kennzeichen von H-Wellen und von E-Wellen in Hohlleitern? (Erläuterung in zwei Sätzen)

b) Wie ist das Verhalten des Feldwellenwiderstandes von Hohlleitern für den Fall, daß sich λ_0 an die kritische Wellenlänge λ_k von kürzeren Wellenlängen her immer mehr annähert?
b1) bei H-Wellen? b2) bei E-Wellen?

c1) Geben Sie die allgemeine Beziehung für den Frequenzbereich (bzw. Wellenlängenbereich) an, in dem in einem Rechteckhohlleiter *nur* eine H_{10}-Welle existieren kann.

c2) Geben Sie den Frequenzbereich nach c1) für den Hohlleiter mit den oben genannten Abmessungen an.

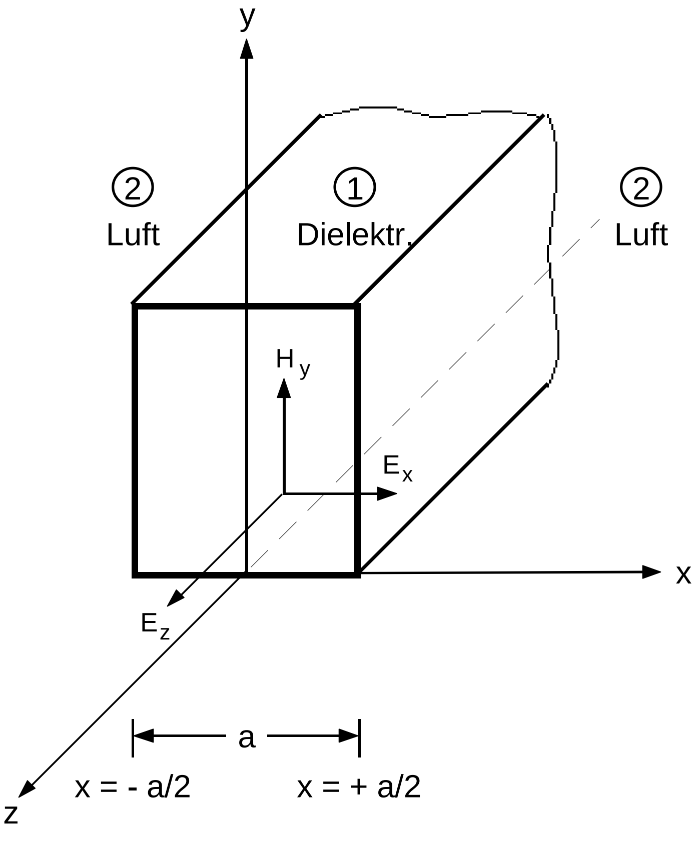
d1) Geben Sie die allgemeine Beziehung für diejenige Frequenz an, von der ab in einem Rechteckhohlleiter auch eine H_{01}-Welle existieren kann.

d2) Geben Sie den Zahlenwert für die Frequenz nach d1) für den Hohlleiter mit den oben genannten Abmessungen an.

e) Geben Sie den Zahlenwert für den Feldwellenwiderstand an, wenn sich im Hohlleiter mit den oben genannten Abmessungen eine H_{10}-Welle der Frequenz f = 2 GHz ausbreitet.

f) Geben Sie den Zahlenwert für die H_{102}-Resonanzfrequenz an, wenn der Hohlleiter mit oben genannten Abmessungen im Abstand von 23 cm mit leitenden Ebenen abgeschlossen ist.

Übung 12:
6.12. Dielektrischer Wellenleiter für Mikrowellen



Werkstoffdaten:

$$\varepsilon_1 = 2 \cdot \varepsilon_0$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0$$
$$\mu_1 = \mu_0$$
$$\mu_2 = \mu_0$$

Ein dielektrischer Wellenleiter besteht aus einer Platte der Dicke a in x-Richtung (und einer vergleichsweise dazu großen Ausdehnung in y-Richtung). Es breitet sich eine E-Welle in positiver z-Richtung aus.

a) Gegeben ist die Feldkonstante k_1 in normierter Form mit

$$k_1 \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{also} \quad \tan\left(k_1 \cdot \frac{a}{2}\right) = 1$$

Berechnen Sie daraus k_2 in normierter Form, also $k_2 \cdot \frac{a}{2}$.

b) Die Wellenausbreitung soll bei der (auf den freien Raum bezogenen) Wellenlänge λ_0 = 2cm erfolgen. Dimensionieren Sie die hierzu notwendige Breite a aus den Werkstoffdaten und dem Ergebnis von a).

c) Geben Sie die allgemeine Beziehung für den Feldwellenwiderstand

$$Z_F = \frac{E_{transversal}}{H_{transversal}}$$

durch Quotientenbildung aus den in Frage kommenden Feldkomponenten an.

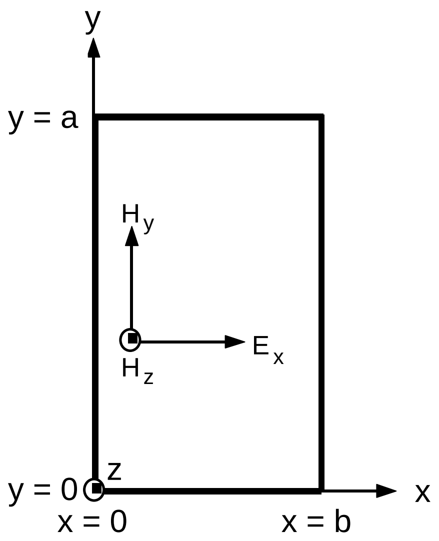
d) Wie groß sind die Feldwellenwiderstände Z_{F1} und Z_{F2} zahlenmäßig?

e) In der Entfernung d von der Oberfläche des Werkstoffes 1 seien die Beträge der Feldkomponenten auf 1/e des Wertes abgefallen, den sie direkt an der Oberfläche haben. Berechnen Sie den Zahlenwert von d.

f) Ist der berechnete Wellenmode bei der gegebenen Dimensionierung der einzige oder sind noch weitere möglich? (Bitte kurze Begründung)

Übung 13:

6.13. Dimensionieren eines Hohlleiters nach vorgegebener Gruppengeschwindigkeit der Welle



Eine H_{10}-Welle der Frequenz f = 4.8 GHz soll sich in dem Hohlleiter mit der Gruppengeschwindigkeit $v_G = 1.87 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ ausbreiten.

a) Wie groß ist die Seitenlänge a des Hohlleiters zu dimensionieren?

b) Die Grenzfrequenz der H_{01}-Welle soll f_g = 6 GHz betragen. Wie groß ist die Seitenlänge b des Hohlleiters zu dimensionieren?

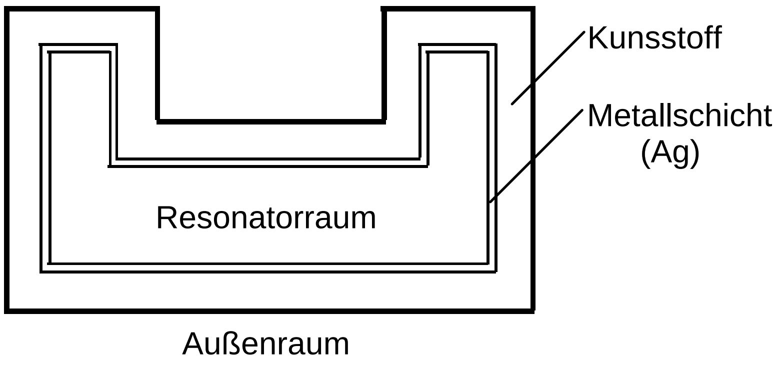
c) Wie groß ist die Grenzfrequenz der H_{10}-Welle für den nach a) dimensionierten Hohlleiter?

d) Wie groß ist die Phasengeschwindigkeit v_P der H_{10}-Welle im Hohlleiter?

e) Wie groß ist der Feldwellenwiderstand Z_F der H_{10}-Welle im Hohlleiter?

Übung 14:

6.14. Dimensionieren der Metallbeschichtung einer Mikrowellenbaugruppe



Eine Mikrowellenbaugruppe der Raumfahrt soll zur Gewichtsersparnis aus galvanisierbarem Kunsstoff (z.B. ABS) gefertigt und zur Stromleitung innen metallbeschichtet werden.

Betriebsfrequenz: $f = 10$ GHz

Schichtwerkstoff: Silber, $\kappa = 62 \cdot 10^4 \frac{S}{cm} = 62 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$

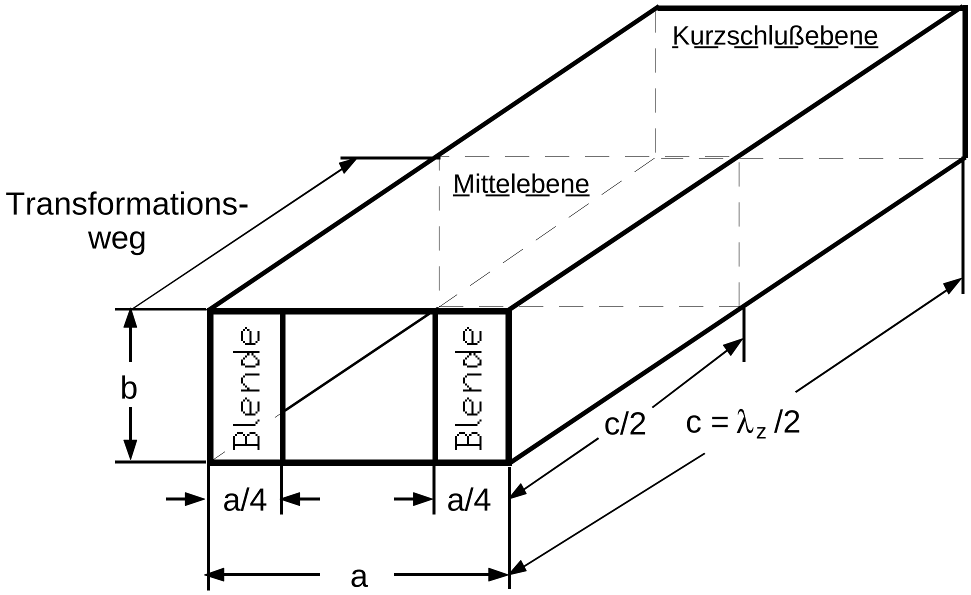
a) Wie groß ist die Eindringtiefe x_0 bei der angegebenen Frequenz in den Werkstoff Silber?

b) Wie dick muß die Silberschicht auf dem Kunststoff sein, wenn die Stromdichte in der Schicht auf $2.5 \cdot 10^{-3}$ abfallen soll?

c) Wie groß ist der spezifische Oberflächenwiderstand der Beschichtung bei der Betriebsfrequenz und bei Gleichstrom?

Übung 15:

6.15. Impedanztransformation von der Lastseite in die Mitte eines Hohlraumresonators



a = 1.5 cm
Betriebsfrequenz: $f = f_R = 12$ GHz
H_{101}-Resonanz

In einem Hohlraumresonator soll in der gestrichelt gezeichneten Mittelebene das aktive Bauelement angeordnet werden; deshalb soll die dort wirksame Lastimpedanz bestimmt werden.

a) Berechen Sie für die oben angegebenen Daten die Hohlleiterwellenlänge λ_z und daraus die Seitenlänge c

b) Für den lastseitigen Reflexionsfaktor soll (näherungsweise) gelten

$$|r_L| = \frac{\text{gesamte Blendenflaeche}}{\text{gesamte Querschnittsflaeche}}$$

Wie groß ist der lastseitige Reflexionsfaktor? (Betrag *und* Vorzeichen)

Beachten Sie bei der Festlegung des Vorzeichens, daß mit zunehmender Blendenfläche der Reflexionsfaktor gegen den einer Kurzschlußebene gehen muß.

c) Tragen Sie den in b) berechneten Reflexionsfaktor in das beiliegende Smith-Diagramm ein und kennzeichnen Sie den Punkt durch r_L (Reflexionsfaktor der Lastseite)

d) Transformieren Sie nun im Smith-Diagramm den Reflexionsfaktor r_L in die Mittelebene des Resonators. Der Transformationsweg muß erkennbar sein. Kennzeichnen Sie den Endpunkt der Transformation durch r_M (Reflexionsfaktor bezogen auf Mittelebene)

e) Entnehmen Sie dem Smith-Diagramm die normierte Impedanz, welche zu r_M gehört.

R / Bezugswiderstand =

X / Bezugswiderstand =

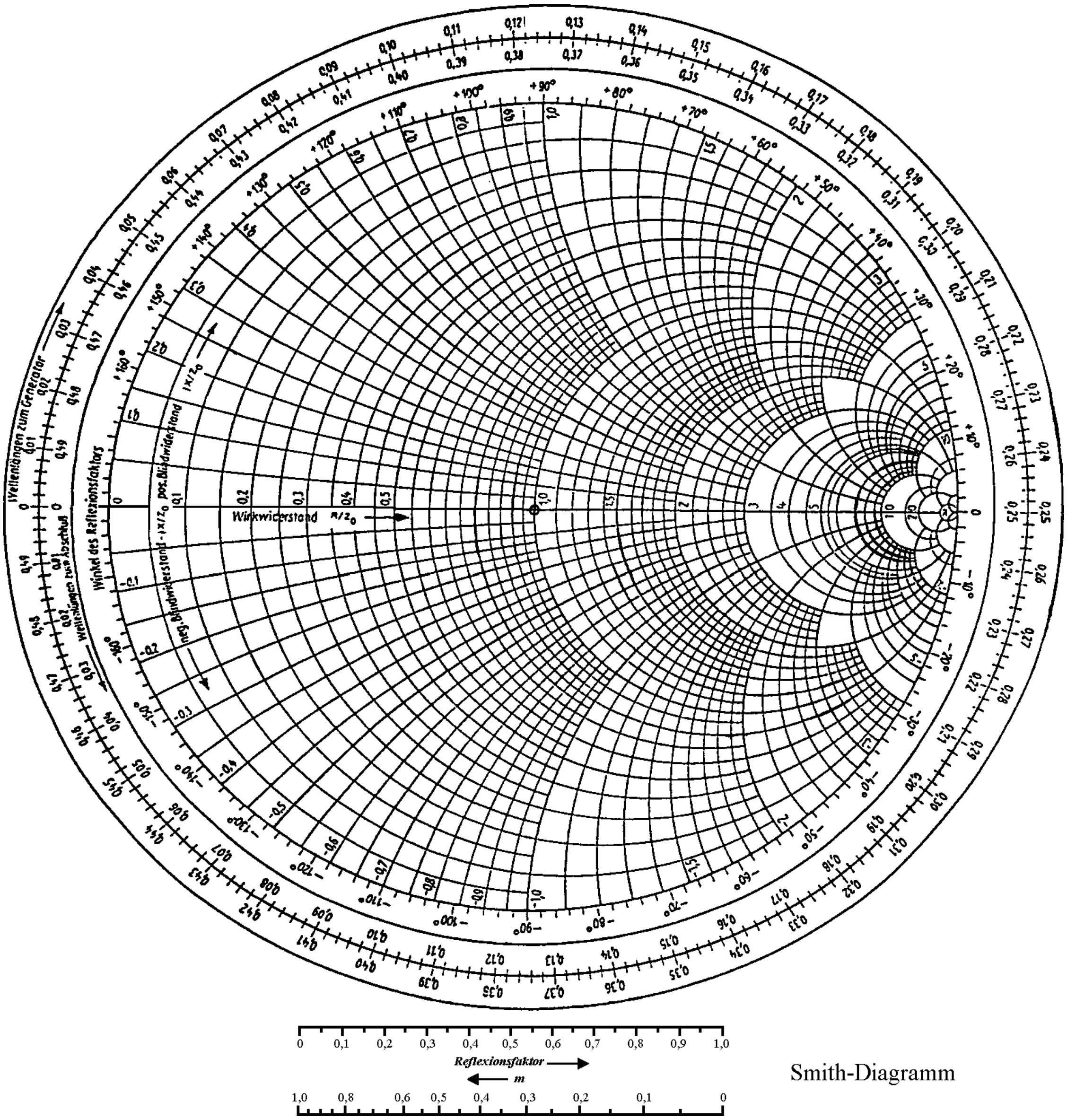
f) Berechnen Sie für die angegebenen Daten den Feldwellenwiderstand des Hohlleiters.

g) Berechnen Sie aus den Ergebnissen von e) und f) die Impedanz, mit welcher die Lastseite des Resonators in der Mittelebene erscheint.

R =

X =

Smith-Diagramm zu Übung 15:



Smith-Diagramm

Übung 16:
6.16. Wellenausbreitung in einem Mikrowellen-Ferrit

Ein Mikrowellen-Ferrit ist durch ein magnetisches Gleichfeld H_0 so vormagnetisiert, daß bei der Frequenz

$$f = 2\ \text{GHz}$$

folgender Zusammenhang zwischen $\vec{B}$ und $\vec{H}$ gilt.

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.75 \cdot \mu_0 & j \cdot 4.25 \cdot \mu_0 & 0 \\ -j \cdot 4.25 \cdot \mu_0 & 5.75 \cdot \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$$

Die Wellenausbreitung erfolgt in H_0-Richtung. Die Dielektrizitätszahl des Ferrites beträgt

$$\varepsilon_r = 4$$

a) Wie groß sind die Permeabilitätskonstanten

μ_+ der rechtsdrehenden zirkular polarisierten Welle
μ_- der linksdrehenden zirkular polarisierten Welle ?

b) Wie groß sind die Phasenkonstanten (Imaginärteil von γ)

β_+ der rechtsdrehenden zirkular polarisierten Welle
β_- der linksdrehenden zirkular polarisierten Welle ?

c) Um welchen Winkel $\Delta\varphi$ wird die räumliche Feldrichtung einer linear polarisierten Welle gedreht, die in dem Ferrit eine Wegstrecke l = 6 cm durchläuft?

Lösungen zu den Aufgaben

7. Lösungen zu den Aufgaben

Die nachfolgenden Lösungen wurden sorgfältig erarbeitet, trotzdem kann keine Haftung für Fehler übernommen werden. Hinweise auf vorhandene Fehlerteufelchen sind erwünscht und werden bei einer Neuauflage berücksichtigt.

7.1. Lösung zu Übung 1

a) Der Vorlesungsmitschrift entnimmt man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit γ:

$$\boxed{\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Mit der Angabe $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot (1 - j\delta)$ aus der Aufgabenstellung ergibt sich mit $\mu_r = 1$:

$$\Rightarrow \quad \gamma = j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot (1 - j\delta)} = j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \sqrt{1 - j\delta}$$

Für $\sqrt{1 - j\delta}$ verwendet man die Näherung $\sqrt{1 - j\delta} \approx 1 - j\frac{\delta}{2}$, so daß sich ergibt:

$$\Rightarrow \quad \gamma = j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \left(1 - j\frac{\delta}{2}\right) = j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r} + \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{\delta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \alpha + j\beta = \underbrace{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\varepsilon_r} \cdot \frac{\delta}{2}}_{\alpha} + \underbrace{j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\varepsilon_r}}_{j\beta}$$

b) Die Gleichung für den Feldwellenwiderstand lautet hier: $\boxed{Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$

Jetzt setzt man das ε der Aufgabenstellung ein, dann erhält man mit $\mu_r = 1$:

$$\Rightarrow \quad Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot (1 - j\delta)}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - j\delta}}$$

Nun verwendet man die Formel $\boxed{Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$ und die Näherung für $\frac{1}{\sqrt{1 - j\delta}}$:

$$\Rightarrow \quad Z_F = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \left(1 + j\frac{\delta}{2}\right) = \underbrace{\frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_r}}}_{Z_{FR}} + \underbrace{j\frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{\delta}{2}}_{j \cdot Z_{FI}}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{FR} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad ; \quad Z_{FI} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{\delta}{2}$$

c) Man verwendet die Formel für den komplexen Reflexionsfaktor:

$$\boxed{r = \frac{Z_F - Z_{F0}}{Z_F + Z_{F0}}}$$

Jetzt wird Z_F in der Form aus Teilaufgabe b) eingesetzt:

$$\Rightarrow \quad r = \frac{Z_F - Z_{F0}}{Z_F + Z_{F0}} = \frac{\frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_r}} + j\frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{\delta}{2} - Z_{F0}}{\frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_r}} + j\frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{\delta}{2} + Z_{F0}} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_r} + j\frac{\delta}{2}}{1 + \sqrt{\varepsilon_r} + j\frac{\delta}{2}}$$

d) Man verwendet folgende Formeln:

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \quad ; \quad \lambda = \frac{c}{f}}$$

Mit $\mu_r = 1$ ergibt sich:

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r} \cdot f} = \frac{c}{\sqrt{2.4} \cdot 2\text{GHz}} = 0.0968\text{m} = 9.68\text{cm}$$

e) Es ist bekannt: $\gamma = \alpha + j\beta$

$$\Rightarrow \quad e^{-\gamma \cdot x_0} = e^{-(\alpha + j\beta) \cdot x_0} = e^{-\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\varepsilon_r} \cdot \frac{\delta}{2} \cdot x_0} \cdot e^{-j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\varepsilon_r} \cdot x_0}$$

Hierbei ist jedoch die Phase ohne Bedeutung, so daß gilt:

$\Rightarrow \quad e^{-\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\varepsilon_r} \cdot \frac{\delta}{2} \cdot x_0} = \frac{1}{e}$; diese Gleichung wird nun nach x_0 aufgelöst und man erhält:

$$\Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\varepsilon_r} \cdot \frac{\delta}{2}} = \frac{1}{2\pi \cdot 2\text{GHz} \cdot \sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \cdot \sqrt{2.4} \cdot \frac{10^{-3}}{2}} = 30.8\text{m} = 3.08 \cdot 10^3\,\text{cm}$$

f) Anzahl der Wellenlängen:

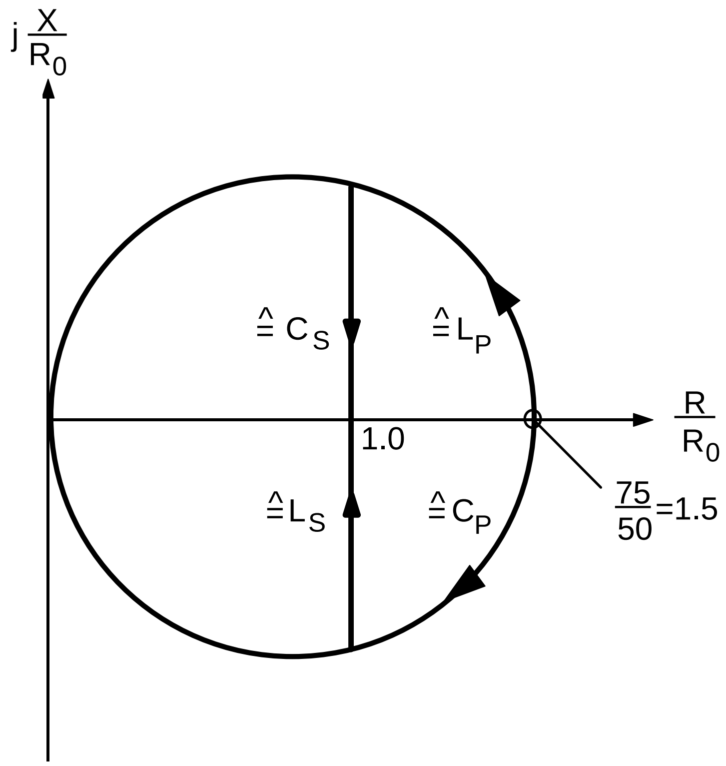
$$\boxed{n = \frac{x_0}{\lambda}} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{x_0}{\lambda} = \frac{3.08 \cdot 10^3\,\text{cm}}{9.68\text{cm}} = 318 \text{ Wellenlängen}$$

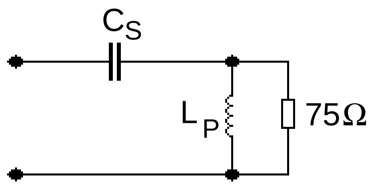
g) unter Verwendung von Z_{FI} gemäß Teilaufgabe b)

$$\Rightarrow \quad Z_{FI} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2.4}} \cdot \frac{10^{-3}}{2} = 0.121\Omega = 121\text{m}\Omega$$

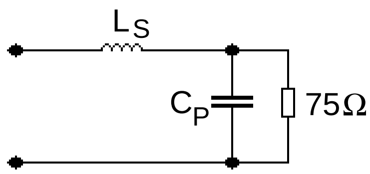
7.2. Lösung zu Übung 2

a) und b)





C_S = 15 pF
L_P = 56 nH



C_P = 4.95 pF
L_S = 18.7 nH

7.3. Lösung zu Übung 3

a) Man benötigt die Formel für den Reflexionsfaktor:

$$\boxed{\underline{r} = \frac{\underline{Z}_L - Z_0}{\underline{Z}_L + Z_0} \mathrel{\hat{=}} \frac{\underline{W}_0 - Z_0}{\underline{W}_0 + Z_0}}$$

In diese Formel werden jetzt die gegebenen Werte für $\underline{W}_0$ und Z_0 eingesetzt:

$$\Rightarrow \quad \underline{r} = \frac{30\Omega + j24\Omega - 60\Omega}{30\Omega + j24\Omega + 60\Omega} = \frac{-30 + j24}{+90 + j24} = \underbrace{-0.245}_{\mathrm{Re}\{\underline{r}\}} + j\underbrace{0.33}_{\mathrm{Im}\{\underline{r}\}} = 0.413 \cdot e^{j126.4°}$$

b) mit $\underline{r} = 0.413 \cdot e^{j126.4°}$ aus Teilaufgabe a) und der Beziehung

$$\boxed{\underline{r} = \frac{\underline{U}_r(0)}{\underline{U}_h(0)}}$$

ergibt sich:

$$\Rightarrow \quad \underline{U}_r(0) = \underline{r} \cdot \underline{U}_h(0) = 0.413 \cdot e^{j126.4°} \cdot 3\hat{V} = 1.24V \cdot e^{j126.4°} \approx -0.737V + j0.995V$$

c) Die komplexe Amplitude der hinlaufenden und der reflektierten Stromwelle bei x = 0 werden mit folgenden Formeln berechnet:

$$\boxed{\underline{I}_h(0) = \frac{\underline{U}_h(0)}{Z_0} \quad ; \quad \underline{I}_r(0) = \frac{\underline{U}_r(0)}{Z_0} \quad \text{bzw.} \quad \underline{I}_r(0) = \underline{r} \cdot \underline{I}_h(0)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{I}_h(0) = \frac{3\hat{V}}{60\Omega} = 0.05A = 50mA$$

$$\Rightarrow \quad \underline{I}_r(0) = \frac{1.24V \cdot e^{j126.4°}}{60\Omega} = 20.66mA \cdot e^{j126.4°} = -12.25mA + j16.62mA$$

d) Die komplexe Amplitude der Gesamtspannung ergibt sich durch Überlagerung der hinlaufenden und reflektierten Spannung:

$$\boxed{\underline{U}(0) = \underline{U}_h(0) + \underline{U}_r(0)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U}(0) = 3\hat{V} + (-0.737V + j0.995V) = 2.26V + j0.995V = 2.47V \cdot e^{j23°}$$

e) Die an die Last abgegebene Wirkleistung berechnet sich unter Zuhilfenahme folgender Formeln:

$$\boxed{P_h = \frac{\frac{1}{2}\cdot \underline{U}_h(0)^2}{Z_0} \quad ; \quad P_r = \frac{\frac{1}{2}\cdot \left|\underline{U}_r(0)\right|^2}{Z_0} \quad ; \quad P_{Last} = P_h - P_r}$$

$$\Rightarrow \quad P_h = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(3\hat{V}\right)^2}{60\Omega} = 0.075W = 75mW$$

$$\Rightarrow \quad P_r = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1.24V\right)^2}{60\Omega} = 0.013W = 13mW$$

$$\Rightarrow \quad P_{Last} = 75mW - 13mW = 62mW$$

7.4. Lösung zu Übung 4

a) Durch vorgegebenes Kriterium ergibt sich:

$$\Rightarrow \quad f \geq \frac{R^*}{0.01 \cdot 2\pi \cdot L^*} \quad \Rightarrow \quad f_g = \frac{1\frac{\Omega}{m}}{0.01 \cdot 2\pi \cdot 300\frac{nH}{m}} = 53.05\text{MHz}$$

b) Wellenwiderstand der Leitung bei f = 1 GHZ:

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} \cdot \sqrt{\frac{1 - j\frac{R^*}{\omega L^*}}{1 - j\frac{G^*}{\omega L^*}}} \approx \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}}$$

$$\Rightarrow \quad Z_0 = \sqrt{\frac{300\frac{nH}{m}}{83\frac{pF}{m}}} = 60.12\Omega$$

c) Die Phasengeschwindigkeit auf der Leitung berechnet sich folgendermaßen:

$$\boxed{v_P = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L^* \cdot C^*}}}$$

$$\Rightarrow \quad v_P = \frac{1}{\sqrt{300\frac{nH}{m} \cdot 83\frac{pF}{m}}} = 200.4 \cdot 10^6 \frac{m}{s} \approx 2 \cdot 10^{10} \frac{cm}{s}$$

d) Zur Bestimmung von ε_r verwendet man folgende Beziehung:

$$\boxed{v_P = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}}}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_r = \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot v_P^{\,2}} = \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot 1 \cdot \left(200.4 \cdot 10^6 \frac{m}{s}\right)^2} = 2.23$$

e) Zur Bestimmung der Länge des Leiterstücks verwendet man die Formel aus der Vorlesungsmitschrift:

$$\boxed{X_{1K} = Z_0 \cdot \tan\left(\frac{2\pi \cdot l}{\lambda_L}\right)}$$

$$\lambda_L = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} = \frac{\frac{c}{f}}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} = \frac{\frac{c}{1\text{GHz}}}{\sqrt{2.23 \cdot 1}} \approx 0.2\text{m}$$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{\arctan\left(\frac{X_{1K}}{Z_0}\right) \cdot \lambda_L}{2\pi} = \frac{\arctan\left(\frac{100\Omega}{60.12\Omega}\right) \cdot 0.2\text{m}}{2\pi} \approx 3.28\text{cm}$$

7.5. Lösung zu Übung 5

a) Wellenwiderstand Z_2 der $\lambda/4$-Transformationsleitung:

$$\boxed{Z_1 = \frac{Z_2^{\,2}}{Z_3} \quad \Rightarrow \quad Z_2 = \sqrt{Z_1 \cdot Z_3}}$$

$$\Rightarrow \quad Z_2 = \sqrt{50\Omega \cdot 60\Omega} = 54.77\Omega$$

b) Bestimmung des Reflexionsfaktors r_{12}:

- Leitung mit Z_2 ist $\lambda/4$-lang, dann ist Z_1 gemäß a) mit seinem Wellenwiderstand abgeschlossen $\Rightarrow$ Es gilt somit: $r_{12} = 0$
- Leitung mit Z_2 ist ∞-lang, dann ist folgende Formel anzuwenden: $\boxed{r_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}}$

$$\Rightarrow \quad r_{12} = \frac{54.77\Omega - 50\Omega}{54.77\Omega + 50\Omega} = 0.0455$$

c) Bestimmung des Reflexionsfaktors r_{23}:

$$r_{23} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} = \frac{60\Omega - 54.77\Omega}{60\Omega + 54.77\Omega} = 0.0455$$

d) Die Transformation ist schmalbandig, da $\lambda/4$-Bedingung gilt.

Ändert sich die Frequenz, dann ändert sich damit zwangsläufig λ und die $\lambda/4$-Bedingung ist nicht mehr erfüllt.

7.6. Lösung zu Übung 6

a) Leerlauf bei x = 0 $\Rightarrow$ I(0) = 0. Angewandt auf die Leitungsgleichungen ergibt sich:

$$U(x) = U(0) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) \quad ; \quad I(x) = j\frac{U(0)}{Z_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow \quad U_{max}\text{, wenn } \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad U_{max} = U(0) \cdot 1 = U(0) \quad \Rightarrow \quad U_{max} = U(0)$$

b)

$$0.8 \cdot |U_{max}| = |U_A| = 0.8 \cdot |U(0)|$$

$$0.8 \cdot |U(0)| = U(0) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x_A}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_A = \frac{\arccos(0.8) \cdot \lambda}{2\pi}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} = \frac{\frac{c}{f}}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} = \frac{\frac{c}{3GHz}}{\sqrt{2 \cdot 1}} = 0.0706m \approx 7cm$$

$$\Rightarrow \quad x_A = \frac{\arccos(0.8) \cdot 0.0706m}{2\pi} = 7.237 \cdot 10^{-3} m \approx 0.72cm$$

7.7. Lösung zu Übung 7

a) Es gilt: $\boxed{v_P = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L^* \cdot C^*}}}$

$$\Rightarrow \quad L^* = \frac{1}{{v_P}^2 \cdot C^*} = \frac{1}{\left(1.5 \cdot 10^9 \frac{cm}{s}\right)^2 \cdot \left(2 \frac{pF}{cm}\right)} = 0.222 \frac{\mu H}{cm}$$

b) Es gilt weiter für den verlustfreien Fall: $\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}}}$

$$\Rightarrow \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} = \sqrt{\frac{0.222 \frac{\mu H}{cm}}{2 \frac{pF}{cm}}} = 333.\bar{3}\Omega$$

c) Man multipliziert die Beläge mit der Länge l = 2cm und erhält:

$$\boxed{\begin{array}{l} C = C^* \cdot \Delta l \\ L = L^* \cdot \Delta l \end{array}} \qquad \begin{array}{l} C = 2 \frac{pF}{cm} \cdot 2cm = 4pF \\ L = 0.222 \frac{\mu H}{cm} \cdot 2cm = 0.444\mu H \end{array}$$

d) Es gilt die Beziehung: $\boxed{\lambda_L = \frac{v_P}{f}}$

$$\lambda_L = \frac{v_P}{f} = \frac{1.5 \cdot 10^9 \frac{cm}{s}}{50MHz} = 30cm \text{ (auf der Leitung)}$$

e) Man verwendet folgende Formeln:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = \frac{\tan(\delta_L) + \tan(\delta_C)}{2} \cdot \beta \approx \frac{\tan(\delta_L)}{2} \cdot \beta \\ \beta = \omega\sqrt{L^* \cdot C^*} = 2\pi f \sqrt{L^* \cdot C^*} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\tan(\delta_L)}{2} \cdot \beta = \frac{\tan(\delta_L)}{2} \cdot 2\pi f \sqrt{L^* \cdot C^*} = \frac{10^{-2}}{2} \cdot 2\pi \cdot 50MHz \cdot \sqrt{0.222 \frac{\mu H}{cm} \cdot 2 \frac{pF}{cm}} = 1.046 \cdot 10^{-3} \frac{1}{cm}$$

7.8. Lösung zu Übung 8

a) $\lambda/4$-Transformation $\Rightarrow \quad Z_1 = \frac{Z_0{}^2}{Z_L} = \frac{Z_0{}^2}{Z_0 + jX}$

b) $Z_2 = Z_1 + jX$ (Reihenschaltung aus Z_1 und Reaktanz jX)

c)

$$Z_1 = \frac{Z_0{}^2}{Z_0 + jX} = \frac{Z_0{}^2 \cdot (Z_0 - jX)}{Z_0{}^2 + X^2} = \frac{Z_0{}^3 - Z_0{}^2 jX}{Z_0{}^2 + X^2} = \frac{Z_0{}^3}{Z_0{}^2 + X^2} - j\frac{Z_0{}^2 X}{Z_0{}^2 + X^2};$$

$$Z_2 = Z_1 + jX = \frac{Z_0{}^3}{Z_0{}^2 + X^2} - j\frac{Z_0{}^2 X}{Z_0{}^2 + X^2} + jX = \frac{Z_0{}^3}{Z_0{}^2 + X^2} + j\frac{X^3}{Z_0{}^2 + X^2};$$

$$\overset{X \ll Z_0}{\Rightarrow} \quad Z_2 \approx Z_0 + j\frac{X^3}{Z_0{}^2} = Z_0 + jX_{Rest}$$

d)

$$jX_{Rest} = j\frac{X^3}{Z_0{}^2} = j\frac{(2\Omega)^3}{(50\Omega)^2} = j3.2 \cdot 10^{-3}\Omega = j0.0032\Omega$$

7.9. Lösung zu Übung 9

a)

$$\boxed{v_P = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}}}$$

mit $\mu_r = 1$ und $\varepsilon_r = 1.2$: $\Rightarrow \quad v_P = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{1 \cdot 1.2}} = 273 \cdot 10^6 \,\frac{m}{s} = 2.73 \cdot 10^{10} \,\frac{cm}{s}$

b) Kapazitätsbelag:

$$\boxed{C^* = 2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{b}{h}}$$

c) Wellenwiderstand:

$$\boxed{Z_F = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} = \frac{1}{C^* \cdot v_P}}$$

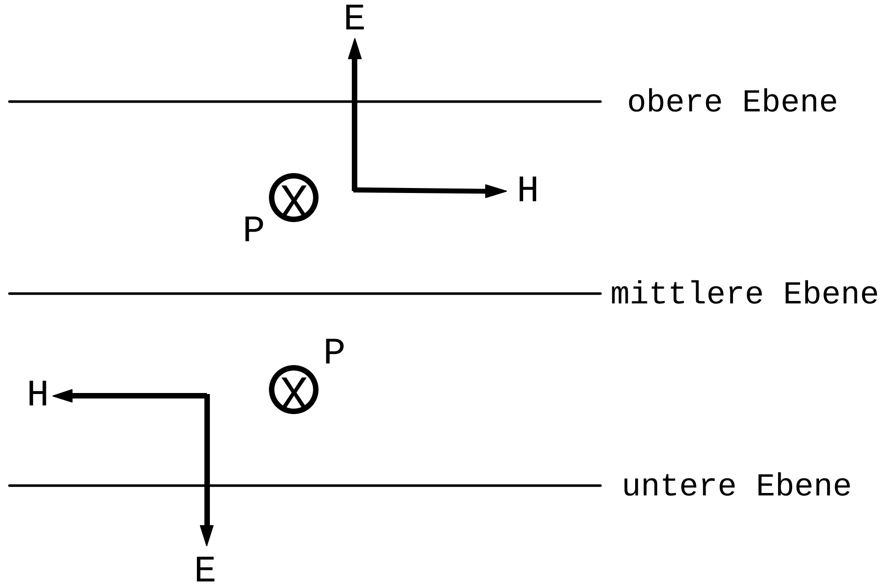
$$\Rightarrow \quad v_P = \frac{1}{\sqrt{L^* \cdot C^*}} \quad \Rightarrow \quad L^* = \frac{1}{{v_P}^2 \cdot C^*}$$

$$\Rightarrow \quad Z_F = \frac{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{b}{h} \cdot c}$$

d) Gleichung für Z_F aus Teilaufgabe c) wird nach der Breite b aufgelöst:

$$\Rightarrow \quad b = \frac{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{Z_F}{h} \cdot c} = \frac{\sqrt{1.2 \cdot 1}}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot 1.2 \cdot \frac{20\Omega}{0.4mm} \cdot c} = 3.44mm$$

e)



f) Blindkomponente des Wellenwiderstandes:

$$Z_F = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} = \sqrt{\frac{L^*}{C_0{}^* \cdot \left(1 - j \cdot \tan\left(\delta_\varepsilon\right)\right)}} \approx Z_F \cdot \left(1 + j\frac{\delta_\varepsilon}{2}\right)$$

$$jX = j\frac{\delta_\varepsilon}{2} \cdot Z_F = j\frac{10^{-3}}{2} \cdot 20\Omega = j0.01\Omega = j10m\Omega$$

7.10. Lösung zu Übung 10

a)

$$Z_1 = Z_0 \| L = \frac{j\omega L \cdot Z_0}{j\omega L + Z_0} = \frac{j\omega L \cdot Z_0 \cdot (Z_0 - j\omega L)}{Z_0^{\ 2} + (\omega L)^2};$$

$$Z_1 = \frac{\omega^2 L^2 Z_0}{Z_0^{\ 2} + (\omega L)^2} + j\frac{\omega L Z_0^{\ 2}}{Z_0^{\ 2} + (\omega L)^2} = \frac{(2\pi f L)^2 \cdot Z_0}{Z_0^{\ 2} + (\omega L)^2} + j\frac{2\pi f L \cdot Z_0^{\ 2}}{Z_0^{\ 2} + (\omega L)^2} = 39.94\Omega + j79.95\Omega;$$

$$Z_1 \approx (40 + j80)\Omega$$

b) Das Smith-Diagramm folgt auf der nächsten Seite
Vorgehensweise:

- Normierung von Z_1 auf Z_0: $\frac{Z_1}{Z_0} = \frac{40}{200} + j\frac{80}{200} = 0.2 + j0.4 = Z_{1norm}$

  $\Rightarrow$ Z_{1norm} in Smith-Diagramm eintragen
- Phase von r_1 ablesen:
  Man zieht eine Gerade vom Ursprung durch Z_{1norm} und liest den Phasenwinkel von 135° am inneren Rand des Diagramms ab.
- Betrag von r_1 ermitteln:
  a) Der Ursprung entspricht r = 0, der linke Rand entspricht r = -1. Jetzt kann man die Entfernung des linken Randes und die Entfernung von Z_{1norm} jeweils vom Ursprung mittels Lineal ermitteln und den Dreisatz anwenden:

  z.B.: $|r_1| = 1 \mathrel{\hat{=}} 5.6\text{cm}$; $|r_1| = ? \mathrel{\hat{=}} 4\text{cm}$ $\Rightarrow |r_1| = \frac{4}{5.6} = 0.71$

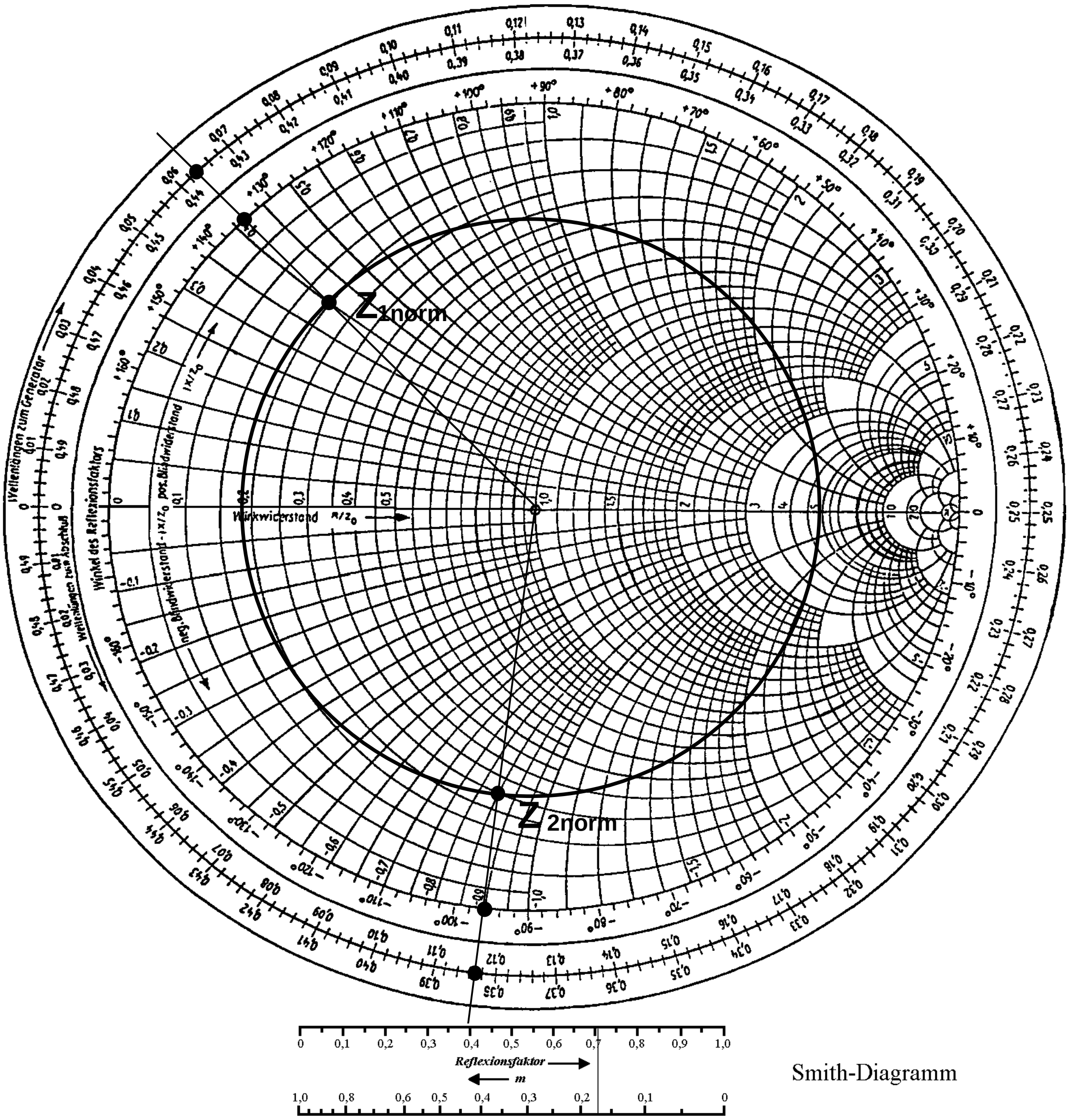
  b) Alternativ zu a) kann auch der m-Kreis (hier: m = 0.18) abgelesen werden und aus dem Diagramm unterhalb des Smith-Diagramms der Reflexionsfaktor abgelesen werden. Es ergibt sich auch hier: $r_1 = 0.71$

  $\Rightarrow$ $r_1 = 0.71 \cdot e^{j135°}$

c) Vorgehensweise:

- $\frac{l}{\lambda_L} = \frac{8\text{cm}}{25\text{cm}} = 0.32$ zu $\frac{l}{\lambda} = 0.063$ addieren
  (0.063 ist der Wert, der sich auf der äußersten Skala des Smith-Diagramms durch die Gerade durch Ursprung und Z_{1norm} ergibt)
- neues $\frac{l}{\lambda} = 0.32 + 0.063 = 0.383$ in das Diagramm eintragen und Gerade zum Ursprung ziehen. Schnittpunkt mit m-Kreis ergibt Z_{2norm}. Dieser wird abgelesen:
  $Z_{2norm} = 0.3 - j0.85$ entnormieren: $Z_2 = Z_{2norm} \cdot Z_0 = 0.3 \cdot 200\Omega - j0.85 \cdot 200\Omega$
  $\Rightarrow$ $Z_2 = (60 - j170)\Omega$
- Der Reflexionsfaktor hat den gleichen Betrag wie Z_2 (gleicher m-Kreis); die Phase liest man am Schnittpunkt der Gerade durch Z_{2norm} und dem Ursprung am inneren Rand des Diagramms ab: -96°
  $\Rightarrow$ $r_2 = 0.71 \cdot e^{-j96°}$

Smith-Diagramm zu b), c)



Smith-Diagramm

7.11. Lösung zu Übung 11

a) Kennzeichen von H-Wellen: H-Komponente in Fortpflanzungsrichtung vorhanden
Kennzeichen von E-Wellen: E-Komponente in Fortpflanzungsrichtung vorhanden

b)

H-Welle: $Z_F = \dfrac{Z_{F0}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_k}\right)^2}} \overset{\lambda_0 \to \lambda_k}{\Rightarrow} \infty$

E-Welle: $Z_F = Z_{F0} \cdot \sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_k}\right)^2} \overset{\lambda_0 \to \lambda_k}{\Rightarrow} 0$

c1) Existenz von H_{mn}-Wellen für:

$$\boxed{\lambda_0 < \lambda_{0g} = \frac{2a}{m} \quad ; \quad \lambda_0 < \lambda_{0g} = \frac{2b}{n}}$$

a = lange Seite (hier: 10cm); b = kurze Seite (hier: 4cm)

- H_{10}-Welle existiert für $\lambda_0 < \lambda_{0g} = \dfrac{2a}{m} = \dfrac{2 \cdot 10\text{cm}}{1} = 20\text{cm}$
- H_{20}-Welle existiert für $\lambda_0 < \lambda_{0g} = \dfrac{2a}{m} = \dfrac{2 \cdot 10\text{cm}}{2} = 10\text{cm}$
- H_{01}-Welle existiert für $\lambda_0 < \lambda_{0g} = \dfrac{2b}{n} = \dfrac{2 \cdot 4\text{cm}}{1} = 8\text{cm}$
- H_{02}-Welle existiert für $\lambda_0 < \lambda_{0g} = \dfrac{2b}{n} = \dfrac{2 \cdot 4\text{cm}}{2} = 4\text{cm}$

Es existiert also *nur* eine H_{10}-Welle im Bereich: $a < \lambda_0 < 2a \quad \Rightarrow \quad 10\text{cm} < \lambda_0 < 20\text{cm}$, da H_{20}-Welle vor H_{01}-Welle existent ist.

c2) $10\text{cm} < \lambda_0 < 20\text{cm}$ $\qquad$ $(f = c / \lambda)$
Dies ergibt einen Frequenzbereich: $\qquad$ 3 GHz > f > 1.5 GHz

d1) Eine H_{01}-Welle kann gemäß c1) nur existieren für $\lambda_0 < 2b$

d2) $f > \dfrac{c}{2b} = \dfrac{c}{2 \cdot 4\text{cm}} = \dfrac{c}{8\text{cm}} = 3.7\text{GHz}$

e) H_{10}-Welle $\Rightarrow$ $m = 1;\ n = 0$
$Z_{F0} = 377\Omega$

für H-Welle gilt gemäß b): $Z_F = \dfrac{Z_{F0}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_k}\right)^2}}$

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{c}{2\text{GHz}} = 0.149\text{m} \approx 15\text{cm}$$

$$\lambda_k \mathrel{\hat{=}} \lambda_{0g} = \frac{2a}{m} = \frac{2\cdot 10\text{cm}}{1} = 20\text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad Z_F = \frac{377\Omega}{\sqrt{1-\left(\dfrac{15\text{cm}}{20\text{cm}}\right)^2}} \approx 570\Omega$$

f) H_{102}-Resonanzfrequenz $\Rightarrow$ $m = 1;\ n = 0;\ p=2$

Es gilt die Beziehung:

$$\boxed{\lambda_{0\,\text{Res}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{m}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{n}{2b}\right)^2+\left(\dfrac{p}{2c}\right)^2}}}$$

ferner ist nach Vorgabe: $a = 10\text{cm};\ b = 4\text{cm};\ c = 23\text{cm}$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{0\,\text{Res}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{20\text{cm}}\right)^2+0+\left(\dfrac{2}{46\text{cm}}\right)^2}} \approx 15\text{cm}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{c}{\lambda_{0\,\text{Res}}} = \frac{c}{15\text{cm}} \approx 2\text{GHz}$$

allgemeiner Hinweis zu H_{mn}-Wellen

„m“ gibt die Anzahl der Feldstärke-Maxima auf der breiten Seite und „n“ auf der schmalen Seite an.
Eine H_{21}-Welle hat folglich zwei Feldstärke-Maxima auf der breiten und eines auf der schmalen Seite.

7.12. Lösung zu Übung 12

a) k_2 in normierter Form erhält man mittels zweiter Bestimmungsgleichung:

$$\boxed{\frac{k_2}{\varepsilon_2} = \frac{k_1}{\varepsilon_1} \cdot \tan\left(k_1 \cdot \frac{a}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(k_2 \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \left(k_1 \cdot \frac{a}{2}\right) \cdot \tan\left(k_1 \cdot \frac{a}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(k_2 \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{\varepsilon_0}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

b) Hierbei verwendet man die erste Bestimmungsgleichung:

$$\boxed{k_1^{\ 2} + k_2^{\ 2} = \omega^2 \cdot (\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2) \quad \Rightarrow \quad \left(k_1 \cdot \frac{a}{2}\right)^2 + \left(k_2 \cdot \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\omega \cdot \frac{a}{2}\right)^2 \cdot (\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(k_1 \cdot \frac{a}{2}\right)^2 + \left(k_2 \cdot \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\omega \cdot \frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{c^2} \cdot (\varepsilon_{r1}\mu_{r1} - \varepsilon_{r2}\mu_{r2}) = \left(\frac{\pi a}{\lambda_0}\right)^2 \cdot (\varepsilon_{r1}\mu_{r1} - \varepsilon_{r2}\mu_{r2});$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = \left(\frac{\pi a}{\lambda_0}\right)^2 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = \left(\frac{\pi a}{\lambda_0}\right)^2;$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{64}} = \frac{\pi a}{\lambda_0};$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{5}{64}} \cdot \lambda_0 = \sqrt{\frac{5}{64}} \cdot 2\text{cm} = 0.56\text{cm}$$

c) Aus den Gleichungen in der Vorlesungsmitschrift erkennt man den Zusammenhang:

$$\boxed{Z_{F1} = \left(\frac{E_x}{H_y}\right)_1 = \frac{\beta}{\omega \cdot \varepsilon_1} \quad ; \quad Z_{F2} = \left(\frac{E_x}{H_y}\right)_2 = \frac{\beta}{\omega \cdot \varepsilon_2}}$$

d) Man verwendet die Formeln aus Teilaufgabe c), jedoch muß vorher noch das unbekannte β mittels nachfolgender Beziehung bestimmt werden:

$$\boxed{\beta = \sqrt{\frac{k_2^{\ 2} \cdot \varepsilon_1\mu_1 + k_1^{\ 2} \cdot \varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1 - \varepsilon_2\mu_2}}}$$

zu d)

$$k_1 \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{2\pi}{4a} = \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{2 \cdot 0.56\mathrm{cm}} \approx 2.8 \frac{1}{\mathrm{cm}};$$

$$k_2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{\pi}{8} \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{2\pi}{8a} = \frac{\pi}{4a} = \frac{\pi}{4 \cdot 0.56\mathrm{cm}} \approx 1.4 \frac{1}{\mathrm{cm}};$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \sqrt{\frac{\left(140\frac{1}{\mathrm{m}}\right)^2 \cdot 2\varepsilon_0\mu_0 + \left(280\frac{1}{\mathrm{m}}\right)^2 \cdot \varepsilon_0\mu_0}{2\varepsilon_0\mu_0 - \varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\left(140\frac{1}{\mathrm{m}}\right)^2 \cdot 2 + \left(280\frac{1}{\mathrm{m}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \beta \approx 343\frac{1}{\mathrm{m}} = 3.43\frac{1}{\mathrm{cm}}$$

$$\Rightarrow \quad Z_{F1} = \frac{\beta}{\omega \cdot \varepsilon_1} = \frac{\beta}{2\pi \cdot \frac{c}{\lambda_0} \cdot 2\varepsilon_0} = \frac{343\frac{1}{\mathrm{m}} \cdot 0.02\mathrm{m}}{4\pi \cdot c \cdot \varepsilon_0} \approx 205.66\Omega$$

$$\Rightarrow \quad Z_{F2} = \frac{\beta}{\omega \cdot \varepsilon_2} = \frac{\beta}{2\pi \cdot \frac{c}{\lambda_0} \cdot \varepsilon_0} = \frac{343\frac{1}{\mathrm{m}} \cdot 0.02\mathrm{m}}{2\pi \cdot c \cdot \varepsilon_0} \approx 411.32\Omega$$

e) Ansatz: $e^{-k_2 \cdot d} = e^{-1} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{k_2} = \frac{1}{1.4}\mathrm{cm} = 0.71\mathrm{cm}$

f) Weitere Wellenmoden sind nicht möglich.
Das Gleichungssystem für k_1, k_2 hat hier nur eine einzige Lösung.

7.13. Lösung zu Übung 13

a) $\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{c}{4.8\text{GHz}} = 0.062\text{m} = 6.2\text{cm}$

Desweiteren werden folgende Zusammenhänge verwendet:

$$\boxed{v_G = c \cdot \sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0g}}\right)^2} \quad ; \quad \lambda_{0g} = \frac{2a}{m}}$$

Man löst jetzt die erste Gleichung nach λ_{0g} auf und setzt sie in Beziehung zur zweiten Gleichung:

$$\lambda_{0g} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v_G}{c}\right)^2}} = \frac{2a}{m} \qquad \text{für } H_{10}\text{-Welle: } m = 1$$

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v_G}{c}\right)^2}} = 2a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\lambda_0}{2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v_G}{c}\right)^2}} = \frac{0.062\text{m}}{2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{187\cdot 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{c}\right)^2}} = 0.0396\text{m} \approx 4\text{cm}$$

b) H_{01}-Welle: n = 1; $\lambda_{0g} = \frac{c}{f_g} = \frac{c}{6\text{GHz}} = 5\text{cm}$

$$\boxed{\lambda_{0g} = \frac{2b}{n}} \qquad \Rightarrow \quad b = \frac{\lambda_{0g}\cdot n}{2} = \frac{5\text{cm}\cdot 1}{2} = 2.5\text{cm}$$

c) H_{10}-Welle: m = 1;

$$\lambda_g < \lambda_{0g} = \frac{2a}{m} = \frac{2\cdot 4\text{cm}}{1} = 8\text{cm} \quad \Rightarrow \quad f_{g_{H_{10}}} = \frac{c}{\lambda_{0g}} = \frac{c}{0.08\text{m}} \approx 3.75\text{GHz}$$

d) Man verwendet folgende Formel:

$$\boxed{v_P = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0g}}\right)^2}}}$$

$$\lambda_{0g} = \frac{2a}{m} = \frac{2\cdot 4\text{cm}}{1} = 8\text{cm} \quad \Rightarrow \quad v_{P_{H_{10}}} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{6.2\text{cm}}{8\text{cm}}\right)^2}} = 474\cdot 10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 4.8\cdot 10^{10}\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

e) Feldwellenwiderstand:

$$\boxed{Z_F = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0g}}\right)^2}}} \qquad \Rightarrow \quad Z_F = \frac{377\Omega}{\sqrt{1-\left(\frac{6.2\text{cm}}{8\text{cm}}\right)^2}} \approx 600\Omega$$

7.14. Lösung zu Übung 14

a) Man verwendet zur Berechnung der Eindringtiefe x_0 folgende Formel:

$$\boxed{x_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}}}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = \sqrt{\frac{2}{2\pi f \cdot \mu_0 \cdot \kappa}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi \cdot 10\text{GHz} \cdot \mu_0 \cdot 62 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}}} = 0.639\mu\text{m}$$

b) $\dfrac{S_x(d)}{S_x(0)} = e^{-\frac{d}{Z_0}} = e^{-\frac{d}{0.639\mu m}} \overset{!}{=} 2.5 \cdot 10^{-3}$

$$\Rightarrow \quad d = \ln\left(2.5 \cdot 10^{-3}\right) \cdot \left(-Z_0\right) = \ln\left(2.5 \cdot 10^{-3}\right) \cdot \left(-0.639\mu\text{m}\right) = 3.82\mu\text{m}$$

c) spezifischer Oberflächenwiderstand der Beschichtung:

$$\boxed{Z = (1 + j) \cdot \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}}}$$

bei Betriebsfrequenz:

$$\text{Re}\{Z\} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot 2\pi f}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot 10\text{GHz}}{62 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}}} = 0.025\Omega = 25\text{m}\Omega$$

bei Gleichstrom:

$$R_{DC}^{\ *} = \frac{1}{\kappa \cdot d} = \frac{1}{62 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}} \cdot 3.82\mu\text{m}} \approx 4.2 \cdot 10^{-3}\Omega = 4.2\text{m}\Omega$$

7.15. Lösung zu Übung 15

a) $\lambda_{0g} = \frac{2a}{m} = \frac{2 \cdot 1.5\text{cm}}{1} = 3\text{cm}$; $\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{c}{12\text{GHz}} \approx 2.5\text{cm}$

$$\boxed{\lambda_z = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0g}}\right)^2}}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_z = \frac{2.5\text{cm}}{\sqrt{1-\left(\frac{2.5\text{cm}}{3\text{cm}}\right)^2}} = 4.52\text{cm}$$

aus der Skizze entnimmt man die Beziehung: $c = \frac{\lambda_z}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{4.52\text{cm}}{2} = 2.26\text{cm}$

Natürlich kommt man zum gleichen Ergebnis, wenn man die Formel für die Resonanzfrequenz verwendet, allerdings ist der Rechenweg erheblich länger.

b) $|r_L| = \frac{\text{gesamte Blendenflaeche}}{\text{gesamte Querschnittsflaeche}} = \frac{2 \cdot \left(\frac{a}{4} \cdot b\right)}{a \cdot b} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b}{a \cdot b} = \frac{1}{2}$

gemäß Aufgabenstellung ist $r_L = -0.5$, da bei Kurzschlußebene $r = -1$.

c), d), e) siehe nächste Seite

f) $Z_F = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{0g}}\right)^2}} = \frac{377\Omega}{\sqrt{1-\left(\frac{2.5\text{cm}}{3\text{cm}}\right)^2}} = 682\Omega$

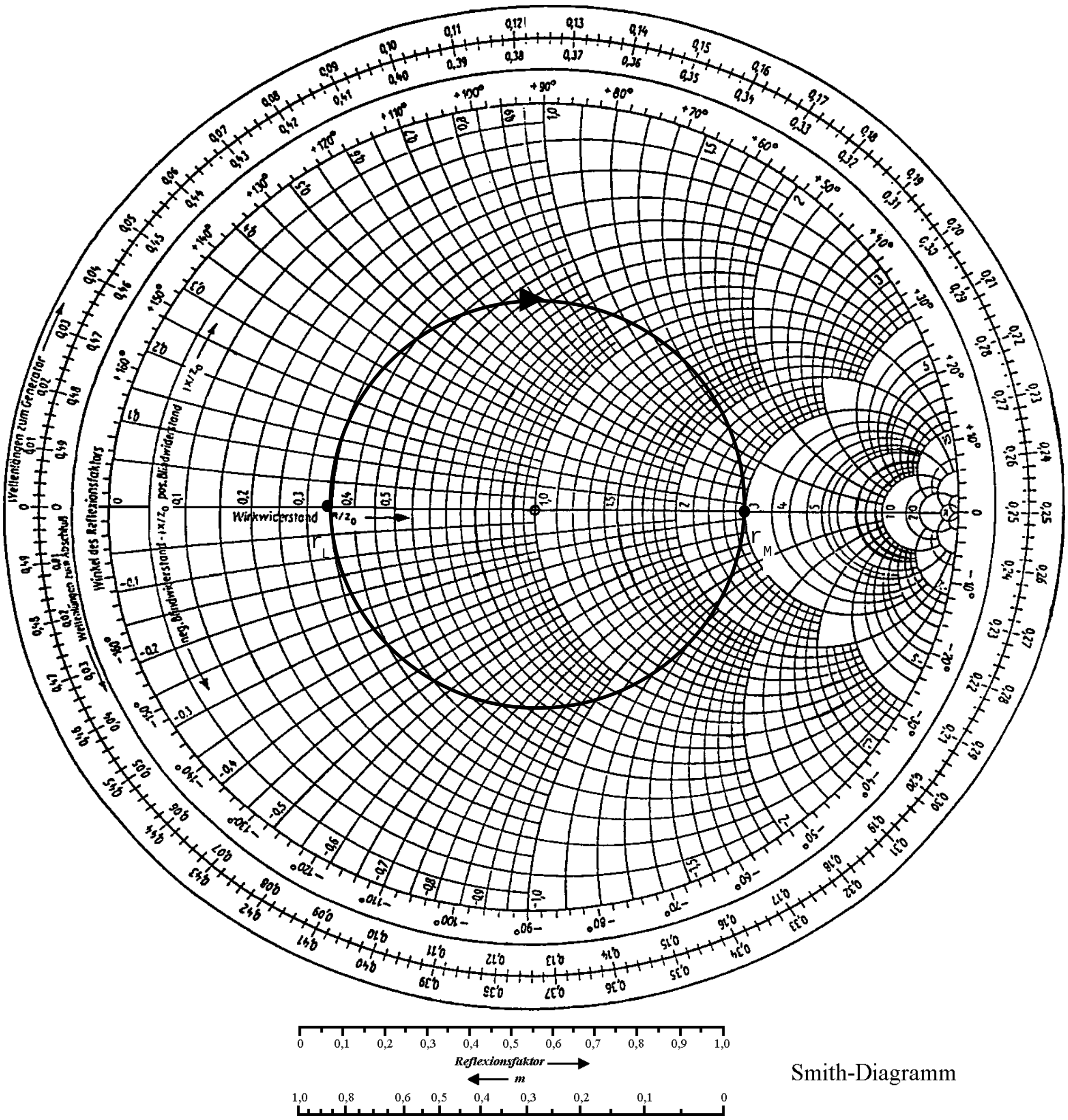
g) $\frac{R}{Z_F} = 3 \quad \Rightarrow \quad R = 3 \cdot Z_F = 3 \cdot 682\Omega = 2046\Omega$

$\frac{X}{Z_F} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0$

c) Eintrag von r_L: siehe Smith-Diagramm
r = -1 entspricht dem linken Rand auf der reellen Achse; r = 0 ist der Ursprung. r_L = -0.5 ist folglich die Mitte zwischen linkem Rand und dem Ursprung auf der reellen Achse.

d) Transformation des Reflexionsfaktors r_L in die Mittelebene entspricht der im Smith-Diagramm eingezeichneten Halbkreisdrehung im Uhrzeigersinn. Ergebnis: r_M

e) Man liest r_M aus dem Smith-Diagramm ab: $R / Z_F = 3$; $X / Z_F = 0$



Smith-Diagramm

7.16. Lösung zu Übung 16

a) Zunächst wird ein Matrixvergleich mit der allgemeinen Form durchgeführt:

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{B} = \|\mu\| \bullet \vec{H} \\ \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & j\mu_2 & 0 \\ -j\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}\end{gathered}}$$

Daraus erkennt man: $\mu_1 = 5.75\mu_0 \quad ; \quad \mu_2 = 4.25\mu_0$

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_+ &= \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_- &= \mu_1 - \mu_2\end{aligned}} \qquad \begin{aligned}\mu_+ &= 5.75\mu_0 + 4.25\mu_0 = 10\mu_0 \\ \mu_- &= 5.75\mu_0 - 4.25\mu_0 = 1.5\mu_0\end{aligned}$$

b) $\boxed{\gamma_+ = j\omega \cdot \sqrt{\mu_+ \cdot \varepsilon}} = j \cdot 2\pi f \cdot \sqrt{10\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r} = j \cdot 2\pi \cdot 2\text{GHz} \cdot \sqrt{10\mu_0\varepsilon_0 \cdot 4} \approx j \cdot 265\frac{1}{m}$

$$\beta_+ = \operatorname{Im}\{\gamma_+\} = 265\frac{1}{m} = 2.65\frac{1}{cm}$$

$\boxed{\gamma_- = j\omega \cdot \sqrt{\mu_- \cdot \varepsilon}} = j \cdot 2\pi f \cdot \sqrt{1.5\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r} = j \cdot 2\pi \cdot 2\text{GHz} \cdot \sqrt{1.5\mu_0\varepsilon_0 \cdot 4} \approx j \cdot 103\frac{1}{m}$

$$\beta_- = \operatorname{Im}\{\gamma_-\} = 103\frac{1}{m} = 1.03\frac{1}{cm}$$

c) Um den Winkel $\Delta\varphi$ zu bestimmen verwendet man folgende Beziehung:

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{1}{2} \cdot \Delta\beta \cdot l}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{1}{2} \cdot |\beta_+ - \beta_-| \cdot l = \frac{1}{2} \cdot \left|(265 - 103)\frac{1}{m}\right| \cdot 0.06m = 4.86\text{rad} = 278.5°$$